



## CHAPTER 1

# 선형대수: 행렬, 벡터, 행렬식, 선형연립방정식

## 1.1 Matrices, Vectors : Addition and Scalar Multiplication

1. 처음 3개의 행렬은 크기가  $2 \times 2$  이고 마지막 2개의 행렬은 크기가  $2 \times 3$  이다. 따라서 크기가 다르다.

2.  $a_{31} = 10, a_{13} = 81, a_{26} = 96, a_{33} = 0$

3. 예제 1번의  $A$  :  $3 \times 3$

예제 2번의  $A$  :  $3 \times 7$

예제 3번의  $A$ 와  $B$  :  $2 \times 2$

예제 5번의  $A$  :  $3 \times 2$

4. 예제 1번의 행렬  $A$ 의 대각선 성분 : 4, 0, 1

예제 3번의 행렬  $A$ 의 대각선 성분 :  $a_{11}, a_{22}$

예제 3번의 행렬  $B$ 의 대각선 성분 : 4, -1

5. (a)  $\frac{1}{5}A$  (b)  $\frac{1}{10}A$

6.  $1km = 0.621371mile$  이므로  $B = 0.621371A$  이다.

7. 성분의 개수가 다른 행벡터와 열벡터는 더할 수 없다.

성분의 개수가 같더라도 열벡터와 행벡터는 더할 수 없다.

성분 0의 개수가 다르더라도 전체 성분의 개수가 같은 행벡터는 더할 수 있다.

벡터와 스칼라도 더할 수 없다.

4개의 성분을 갖는 벡터와  $2 \times 2$  행렬도 더할 수 없다.

$$8. 3A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 15 \\ 12 & 12 & 24 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 \\ -10 & 6 & -8 \\ -8 & 4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 & 15 \\ 2 & 18 & 16 \\ -17 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$2B + 3A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 \\ -10 & 6 & -8 \\ -8 & 4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -6 & 15 \\ 12 & 12 & 24 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 & 15 \\ 2 & 18 & 16 \\ -17 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$0A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$0.2B - 2.4A = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0 \\ -1 & 0.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.4 & -0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.4 & -4.8 & 12 \\ 9.6 & 9.6 & 19.2 \\ -7.2 & 2.4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4 & 5.2 & -12 \\ -10.6 & -9 & -20 \\ 6.4 & -2 & -0.8 \end{bmatrix}$$

$$9. 5A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 25 \\ 20 & 20 & 40 \\ -15 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$0.25B = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 & 0 \\ -1.25 & 0.75 & -1 \\ -1 & 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$5A + 0.25B = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 25 \\ 20 & 20 & 40 \\ -15 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 & 0 \\ -1.25 & 0.75 & -1 \\ -1 & 0.5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.25 & -9.5 & 25 \\ 18.75 & 20.75 & 39 \\ -16 & 5.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$5A + 0.25B + C$ 는 정의되지 않는다.

$$10. 2 \cdot 4A = 8A = \begin{bmatrix} 8 & -16 & 40 \\ 32 & 32 & 64 \\ -24 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot 4A = 2 \begin{bmatrix} 4 & -8 & 20 \\ 16 & 16 & 32 \\ -12 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -16 & 40 \\ 32 & 32 & 64 \\ -24 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$8B - 2B = \begin{bmatrix} 40 & 16 & 0 \\ -40 & 24 & -32 \\ -32 & 16 & -32 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 \\ -10 & 6 & -8 \\ -8 & 4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 12 & 0 \\ -30 & 18 & -24 \\ -24 & 12 & -24 \end{bmatrix}$$

$$6B = \begin{bmatrix} 30 & 12 & 0 \\ -30 & 18 & -24 \\ -24 & 12 & -24 \end{bmatrix}$$

$$11. 6C + 8D = \begin{bmatrix} 36 & -12 \\ 12 & -24 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 & 8 \\ 16 & 0 \\ -8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ 28 & -24 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2(3C + 2D) = 2 \left( \begin{bmatrix} 18 & -6 \\ 6 & -12 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 8 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \right) = 2 \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 14 & -12 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ 28 & -24 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$0.4C - 0.4D = \begin{bmatrix} 2.4 & -0.8 \\ 0.8 & -1.6 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 & -1.2 \\ 0 & -1.6 \\ 0.4 & -1.2 \end{bmatrix}$$

$$0.4(C - D) = 0.4 \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 & -1.2 \\ 0 & -1.6 \\ 0.4 & -1.2 \end{bmatrix}$$

$$12. (C + D) + E = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(D + E) + C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$0(C - E) + 4D = 0 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 8 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 8 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 8 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$A - 0C$ 는 정의되지 않는다.

$$13. (3 \cdot 5)C = 15C = \begin{bmatrix} 90 & -30 \\ 30 & -60 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}$$

$$3(5C) = 3 \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ 10 & -20 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & -30 \\ 30 & -60 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}$$

$$-D + 0E = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$E - D + C + u$ 는 정의되지 않는다.

$$14. (5u + 5v) - \frac{1}{2}w = \left( \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -12.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 15 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -5 \\ 2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -5(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + 2\mathbf{w} &= -5 \begin{bmatrix} 3.2 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -20 \\ 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -16 \\ 5 \\ -2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -20 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -15 \\ 13.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{E} - (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ 는 정의되지 않는다.

$$\begin{aligned} 8(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= 8 \begin{bmatrix} 3.2 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 25.6 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.6 \\ -18 \\ 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$15. (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3.2 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 9 \\ -7.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \\ -2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 9 \\ -7.5 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C} + 0\mathbf{w}$ 와  $0\mathbf{E} + \mathbf{u} - \mathbf{v}$ 는 정의되지 않는다.

$$16. 15\mathbf{v} - 3\mathbf{w} - 0\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 30 \\ -15 \\ 45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 \\ -30 \\ 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 15 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$15\mathbf{v} - 3\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 30 \\ -15 \\ 45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 \\ -30 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 15 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{D} - \mathbf{u} + 3\mathbf{C}$ 는 정의되지 않는다.

$$4.5\mathbf{w} - 1.2\mathbf{u} + 0.2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -18 \\ -45 \\ 36 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.44 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19.04 \\ -45.2 \\ 39.6 \end{bmatrix}$$

$$17. \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \\ -2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -11.0 \\ 8.5 \end{bmatrix}$$

$$18. \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -11.0 \\ 8.5 \end{bmatrix} + \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 11.0 \\ -8.5 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} 19. \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \\ b_{31} + a_{31} & b_{32} + a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} \\ a_{31} + b_{31} + c_{31} & a_{32} + b_{32} + c_{32} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \\ b_{31} + c_{31} & b_{32} + c_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ca_{11} + cb_{11} & ca_{12} + cb_{12} \\ ca_{21} + cb_{21} & ca_{22} + cb_{22} \\ ca_{31} + cb_{31} & ca_{32} + cb_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \\ ca_{31} & ca_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cb_{11} & cb_{12} \\ cb_{21} & cb_{22} \\ cb_{31} & cb_{32} \end{bmatrix} \\ &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c+k)\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} (c+k)a_{11} & (c+k)a_{12} \\ (c+k)a_{21} & (c+k)a_{22} \\ (c+k)a_{31} & (c+k)a_{32} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \\ ca_{31} & ca_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{bmatrix} = c\mathbf{A} + k\mathbf{A} \end{aligned}$$

$$c(k\mathbf{A}) = c \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cka_{11} & cka_{12} \\ cka_{21} & cka_{22} \\ cka_{31} & cka_{32} \end{bmatrix} = (ck)\mathbf{A}$$

$$1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} & 1 \cdot a_{12} \\ 1 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{22} \\ 1 \cdot a_{31} & 1 \cdot a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

20. (a) 마디점 ①에서 지선 1은 나가고 지선 2와 3은 들어오고 지선 4, 5와 6은 만나지 않는다.

따라서  $a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{13} = -1, a_{14} = 0,$

$a_{15} = 0, a_{16} = 0$ 이다.

마디점 ②에서 지선 1, 3과 6은 만나지 않고 지선 2, 4와 5는 나간다.

따라서  $a_{21} = 0, a_{22} = 1, a_{23} = 0, a_{24} = 1, a_{25} = 1,$

$a_{26} = 0$ 이다.

마디점 ③에서 지선 1, 2와 4는 만나지 않고 지선 3은 나가고 지선 5와 6은 들어온다.

따라서  $a_{31} = 0, a_{32} = 0, a_{33} = 1, a_{34} = 0, a_{35} = -1,$

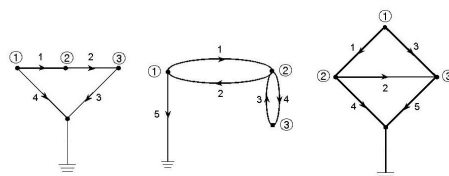
$a_{36} = -1$ 이다.

$$\text{따라서 } \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

$$(b) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)



(d) mesh 1내에서 지선 1과 2는 회전방향이 같고 지선 4는 회전방향이 반대이며 지선 3, 5와 6은 없다. 따라서  $a_{11}=1, a_{12}=1, a_{13}=0, a_{14}=-1, a_{15}=0, a_{16}=0$ 이다.

mesh 2내에서 지선 1, 2와 3은 없고 지선 4와 6은 회전방향이 같으며 지선 5는 회전방향이 반대이다.

따라서  $a_{21}=0, a_{22}=0, a_{23}=0, a_{24}=1,$

$a_{25}=-1, a_{26}=1$ 이다.

mesh 3내에서 지선 1, 4와 6은 없고 지선 2는

회전방향이 반대이며 지선 3과 5는 회전방향이 같다. 따라서  $a_{31}=0, a_{32}=-1, a_{33}=1, a_{34}=0, a_{35}=1, a_{36}=0$ 이다.

mesh 4내에서 지선 1, 3과 6은 회전방향이 같고 지선 2, 4와 5는 없다. 따라서  $a_{41}=1, a_{42}=0,$

$a_{43}=1, a_{44}=0, a_{45}=0, a_{46}=1$ 이다.

$$\text{따라서 } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

## 1.2 Matrix Multiplication

1. 앞 행렬의 행과 뒤 행렬의 열을 맞추어서 곱하기 때문에 앞 행렬의 열의 개수와 뒤 행렬의 행의 개수가 일치해야 곱셈이 정의된다.
2. 주어진 행렬이 대칭행렬이면  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ 이고 반대칭행렬이면  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ 이다. 대칭행렬이면서 동시에 반대칭행렬이면  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ 이다. 따라서  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 이다.
3. 임의의  $3 \times 3$  행렬을 두 벡터의 곱으로 항상 표현할 수 있는 것은 아니다. 각 행이 서로 상수배이고 각 열이 서로 상수배일 때 두 벡터의 곱으로 표현할 수 있다.
4. 반대칭행렬이 될 조건은 주대각선의 성분이 모두 0이고 주대각선을 기준으로 마주 보고 있는 성분의 부호가 반대이다. 따라서 다른 값을 갖는 성분들의 최대수는 12개다.
5. 대칭행렬이 될 조건은 주대각선을 기준으로 마주 보고 있는 성분이 같아야 한다. 즉, 주대각선의 성분을 제외한 12개의 성분은 두 개씩 반드시 같다. 따라서 다른 값을 갖는 성분들의 최대수는 10개다.
6. 삼각행렬은  $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_1^2, \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ 이다.
7. Idempotent의 예제 :  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
8. nilpotent의 예제 :  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
9. (a)  $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 이면  $\mathbf{A}^T = [a_{kj}]$ 이고  $(\mathbf{A}^T)^T = [a_{jk}]$ 이다. 따라서  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ 이다.  
(b)  $\mathbf{A} = [a_{jk}], \mathbf{B} = [b_{jk}]$ 이면  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{jk} + b_{jk}]$ 이고  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = [a_{kj} + b_{kj}]$ 이다. 따라서  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ 이다.  
(c)  $c\mathbf{A} = [ca_{jk}]$ 이고  $(c\mathbf{A})^T = [ca_{kj}]$ 이다. 따라서  $(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$ 이다.
10.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ 이라 하면  $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$ 이고  $(\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}$ 이다.  $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 이므로  $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}$

이다. 따라서  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ 이다.

행렬  $\mathbf{A}$ 의  $i$ 행  $j$ 열의 성분을  $\mathbf{A}_{ij}$ 라 하면  $\mathbf{A}^T$ 의  $i$ 행  $j$ 열의 성분을  $(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$ 이다.

$m \times n$ 행렬  $\mathbf{A}$ 와  $n \times m$ 행렬  $\mathbf{B}$ 에 대해

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^n \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj} = \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_{kj} \mathbf{A}_{ik} \\ = \sum_{k=1}^n (\mathbf{B}^T)_{jk} (\mathbf{A}^T)_{ki} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)_{ij}$$

이다. 따라서  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ 이다.

$$11. \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & 8 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -7 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \\ 5 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 9 \\ -8 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -15 \\ 4 & -2 & 13 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$12. \mathbf{AA}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & -6 \\ 7 & 21 & -8 \\ -6 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -4 \\ -2 & 11 & -10 \\ -4 & -3 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BB}^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$13. \mathbf{CC}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{CB}$ 는 정의되지 않는다.

$$\mathbf{C}^T \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$14. 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -6 & 3 & 12 \\ 3 & 6 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 12 \\ 3 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

$$(3\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -9 & 1 & 6 \\ 9 & 12 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3\mathbf{A}^T - 2\mathbf{B}^T &= 3 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \\ 9 & 12 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -9 & 1 & 6 \\ 9 & 12 & -10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(3\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^T \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -9 & 1 & 6 \\ 9 & 12 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ -33 \end{bmatrix}$$

15.  $\mathbf{Aa}$ 는 정의되지 않는다.

$$\mathbf{Aa}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{Ab})^T = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}^T = [10 \ -3 \ -1]$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{A}^T = [3 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} = [10 \ -3 \ -1]$$

$$16. \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{BC}^T$ 는 정의되지 않는다.

$$\mathbf{Bb} = \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{B} = [3 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = [0 \ 8 \ 2]$$

$$17. \mathbf{ABC} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & 8 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 25 & -11 \\ -25 & 3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{ABa}$ 는 정의되지 않는다.

$$\mathbf{ABb} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & 8 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Ca}^T$ 는 정의되지 않는다.

$$18. \mathbf{ab} = [-1]$$

$$\mathbf{ba} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{aA} = [2 \ -1 \ -11]$$

$$\mathbf{Bb} = \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

19.  $1.5\mathbf{a} + 3.0\mathbf{b}$ 는 정의되지 않는다.

$$1.5\mathbf{a}^T + 3.0\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -3.0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9.0 \\ -3.0 \\ 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ -6.0 \\ 3.0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ab} - \mathbf{Bb} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$20. \mathbf{b}^T \mathbf{Ab} = [9 \ -2 \ 3] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [32]$$

$$\mathbf{aBa}^T = [7 \ -5 \ 0] \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = [3]$$

$$\mathbf{aCC}^T = [3 \ -5] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = [-2 \ -16 \ 6]$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{ba} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \ -2 \ 0] = \begin{bmatrix} -7 & -14 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 21. (k\mathbf{A})\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ka_{11}b_{11} + ka_{12}b_{21} & ka_{11}b_{12} + ka_{12}b_{22} \\ ka_{21}b_{11} + ka_{22}b_{21} & ka_{21}b_{12} + ka_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = k(\mathbf{AB}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(k\mathbf{B}) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ka_{11}b_{11} + ka_{12}b_{21} & ka_{11}b_{12} + ka_{12}b_{22} \\ ka_{21}b_{11} + ka_{22}b_{21} & ka_{21}b_{12} + ka_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = k(\mathbf{AB}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{AB})\mathbf{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= (a_{11} + b_{11})c_{11} + (a_{12} + b_{12})c_{21} \\ &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (a_{11} + b_{11})c_{12} + (a_{12} + b_{12})c_{22} \\ &= a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= (a_{21} + b_{21})c_{11} + (a_{22} + b_{22})c_{21} \\ &= a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} + b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= (a_{21} + b_{21})c_{12} + (a_{22} + b_{22})c_{22} \\ &= a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} + b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11}a_{11} + c_{12}a_{21} & c_{11}a_{12} + c_{12}a_{22} \\ c_{21}a_{11} + c_{22}a_{21} & c_{21}a_{12} + c_{22}a_{22} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} & c_{11}b_{12} + c_{12}b_{22} \\ c_{21}b_{11} + c_{22}b_{21} & c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{CA} + \mathbf{CB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= c_{11}(a_{11} + b_{11}) + c_{12}(a_{21} + b_{21}) \\ &= c_{11}a_{11} + c_{12}a_{21} + c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} \\ y &= c_{11}(a_{12} + b_{12}) + c_{12}(a_{22} + b_{22}) \\ &= c_{11}a_{12} + c_{12}a_{22} + c_{11}b_{12} + c_{12}b_{22} \\ z &= c_{21}(a_{11} + b_{11}) + c_{22}(a_{21} + b_{21}) \\ &= c_{21}a_{11} + c_{22}a_{21} + c_{21}b_{11} + c_{22}b_{21} \\ w &= c_{21}(a_{12} + b_{12}) + c_{22}(a_{22} + b_{22}) \\ &= c_{21}a_{12} + c_{22}a_{22} + c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22} \end{aligned}$$

22.  $\mathbf{AB}$ 의 행벡터는  $[1 \ 5 \ 6]$ ,  $[-1 \ -5 \ 8]$ ,  $[-7 \ 5 \ -4]$ 이다.

$$\mathbf{AB}$$
의 열벡터는  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$ 이다.

23.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

24.  $b_{jk} = j + k$ 이므로  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 이다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{라 하자. } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2a_{11} + 3a_{12} & 3a_{11} + 4a_{12} \\ 2a_{21} + 3a_{22} & 3a_{21} + 4a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{이 고 } \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2a_{11} + 3a_{21} & 2a_{12} + 3a_{22} \\ 3a_{11} + 4a_{21} & 3a_{12} + 4a_{22} \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$a_{12} = a_{21}, a_{22} = \frac{1}{3}(3a_{11} + 2a_{12}) \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & \frac{1}{3}(3a_{11} + 2a_{12}) \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

25. (a)  $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 이면  $\mathbf{A}^T = [a_{kj}]$ 이다.

$\mathbf{A}$ 가 대칭행렬이면  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ 이므로  $a_{kj} = a_{jk}$ 이다.

$\mathbf{A}$ 가 반대칭행렬이면  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ 이므로  $a_{kj} = -a_{jk}$ 이다.

- (b)  $\mathbf{C} = [c_{jk}]$ 이면  $\mathbf{C}^T = [c_{kj}]$ 이다.

$$\mathbf{C} + \mathbf{C}^T = [c_{jk} + c_{kj}] \text{ 이고 } c_{jk} + c_{kj} = c_{kj} + c_{jk} \text{ 이므로}$$

$\mathbf{C} + \mathbf{C}^T$ 는 대칭행렬이다.

$$\mathbf{C} - \mathbf{C}^T = [c_{jk} - c_{kj}] \text{ 이고 } c_{jk} - c_{kj} = -(c_{kj} - c_{jk}) \text{ 이므로}$$

$\mathbf{C} - \mathbf{C}^T$ 는 반대칭행렬이다.

$$\text{따라서 } \mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}^T) \text{ 이다.}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1.5 & 2 \\ -1.5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ -0.5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (c) 식 (10b)와 식 (10c)에 의하여

$$\begin{aligned} (\mathbf{aA} + \mathbf{bB} + \mathbf{cC} + \dots + \mathbf{mM})^T &= (\mathbf{aA})^T + (\mathbf{bB})^T + (\mathbf{cC})^T + \dots + (\mathbf{mM})^T \\ &= \mathbf{aA}^T + \mathbf{bB}^T + \mathbf{cC}^T + \dots + \mathbf{mM}^T. \end{aligned}$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{M}$ 이 대칭행렬이면

$$(\mathbf{aA} + \mathbf{bB} + \mathbf{cC} + \dots + \mathbf{mM})^T = \mathbf{aA} + \mathbf{bB} + \mathbf{cC} + \dots + \mathbf{mM}$$

이므로 식 (14)도 대칭행렬이다.

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{M}$ 이 반대칭행렬이면

$$\begin{aligned} (\mathbf{aA} + \mathbf{bB} + \mathbf{cC} + \dots + \mathbf{mM})^T &= -\mathbf{aA} - \mathbf{bB} - \mathbf{cC} - \dots - \mathbf{mM} \\ &= -(\mathbf{aA} + \mathbf{bB} + \mathbf{cC} + \dots + \mathbf{mM}) \end{aligned}$$

이므로 식 (14)도 반대칭행렬이다.

- (d)  $\mathbf{A}$ 와  $\mathbf{B}$ 가 대칭행렬이므로 식 (10d)에 의하여

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{BA} \text{ 이다.}$$

따라서  $\mathbf{AB}$ 가 대칭행렬이면  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 이고

$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 이면  $\mathbf{AB}$ 가 대칭행렬이다.

- (e)  $\mathbf{A}$ 와  $\mathbf{B}$ 가 반대칭행렬이면 식 (10d)에 의하여

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = (-\mathbf{B})(-\mathbf{A}) = \mathbf{BA} \text{ 이다.}$$

따라서  $\mathbf{BA} = -\mathbf{AB}$ 이면  $\mathbf{AB}$ 가 반대칭행렬이다.

26. 전이행렬이  $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$ 이고 초기 단계에서  $[1 \ 0]^T$

$$\text{이므로 } \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.26 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.86 \\ 0.14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.722 \\ 0.278 \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 0.74와 0.722이다.

28. 초기 단계에서  $[1200 \ 98800]^T$ 이고 전이행렬이

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.002 \\ 0.1 & 0.998 \end{bmatrix} \text{이므로 약 6.5\% 증가한다.}$$

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.002 \\ 0.1 & 0.998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1200 \\ 98800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1277.6 \\ 98722.4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.002 \\ 0.1 & 0.998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1277.6 \\ 98722.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1347.3 \\ 98652.7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.002 \\ 0.1 & 0.998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1347.3 \\ 98652.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1409.9 \\ 98590.1 \end{bmatrix}.$$

29.  $\mathbf{p} = [35 \ 62 \ 30]^T$ 이므로

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 400 & 60 & 240 \\ 100 & 120 & 500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 62 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24920 \\ 25940 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

30. (a)  $y_1 = x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta$ ,  $y_2 = x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 &= (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)^2 + (x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

$$\text{이 고 } \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta}{x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta} = \frac{\tan \theta + x_2/x_1}{1 - (x_2/x_1) \tan \theta} \text{ 이다.}$$

따라서  $[y_1 \ y_2]^T$ 는  $[x_1 \ x_2]^T$ 를  $\theta$ 만큼 반시계방향으로 회전한 것이다.

- (b)  $n = 1$ 이면  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 이다.

$$n = k \text{ 일 때 } \mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \text{라 가정하자.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{k+1} &= \begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta & -\cos k\theta \sin \theta - \sin k\theta \cos \theta \\ \sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta & -\sin k\theta \sin \theta + \cos k\theta \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

수학적 귀납법에 의하여  $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

이다.

- (c)  $\alpha$  만큼 회전이동한 후 다시  $\beta$  만큼 회전이동을 하면  $\alpha + \beta$  만큼 회전이동한 것과 같다.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 1.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

1.  $\begin{bmatrix} -3 & 8 & 5 \\ 8 & -12 & -11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -12 & -11 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -12 & -11 \\ 0 & 3.5 & 0.875 \end{bmatrix}$   
 $3.5y = 0.875, 8x - 12y = -11$  이므로  $x = -1, y = 0.25$ 이다.

2.  $\begin{bmatrix} 3.0 & -0.5 & 0.6 \\ 1.5 & 4.5 & 6.0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3.0 & -0.5 & 0.6 \\ 0 & 4.75 & 5.7 \end{bmatrix}$   
 $4.75y = 5.7, 3.0x - 0.5y = 0.6$  이므로  $x = 0.4, y = 1.2$ 이다.

3.  $\begin{bmatrix} 0 & 8 & 6 & -4 \\ -2 & 4 & -6 & 18 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 6 & -4 \\ -2 & 4 & -6 & 18 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -8 & 22 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -12.5 & 25 \end{bmatrix}$   
 $-12.5z = 25, 8y + 6z = -4, x + y - z = 2$  이므로  
 $x = -1, y = 1, z = -2$ 이다.

4.  $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ -9 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4.25 & 1 & -3 \\ 0 & 4.25 & -1 & 14 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4.25 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

$0z = 11$  이므로 해가 없다.

5.  $\begin{bmatrix} 13 & 12 & 6 \\ -4 & 7 & 73 \\ 4 & 5 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 & 11 \\ -4 & 7 & 73 \\ 13 & 12 & 6 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 0 & 12 & 84 \\ 0 & -4.25 & -29.75 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 0 & 12 & 84 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$12y = 84, 4x + 5y = 11$  이므로  $x = -6, y = 7$ 이다.

6.  $\begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 & 16 \\ -1 & 2 & -5 & -21 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & -21 \\ 4 & -8 & 3 & 16 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & -21 \\ 0 & 0 & -17 & -68 \\ 0 & 0 & -14 & -56 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & -21 \\ 0 & 0 & -17 & -68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$-17z = -68, -x + 2y - 5z = -21$  이므로  $z = 4, y$ 는

임의의 실수,  $x = 2y + 1$ 이다.

따라서 해가 무수히 많다.

이므로  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  이고

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  이다.

(d)  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 01 & 0 \\ 001 & 2 \end{bmatrix}$  이므로  $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x}$  이면  $y_1 = 3x_1,$

$y_2 = x_2, y_3 = \frac{1}{2}x_3$ 를 얻는다. 상수행렬은 모든

방향으로 같은 인수만큼 늘이거나 줄인다.

- (e) 각각  $x_1$  축을 중심으로  $\theta$  만큼,  $x_2$  축을 중심으로  $\phi$  만큼,  $x_3$  축을 중심으로  $\psi$  만큼 회전시킨다.

7.  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$4y = 2, -x + y = -1$  이므로  $x = 1.5, y = 0.5$ 이다.

8.  $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 1.5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$0z = -2$  이므로 해가 없다.

9.  $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & -5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$   
 $-2y - 2z = 8, 3x + 4y - 5z = 8$  이므로  $z$ 는 임의의 실수,  $x = 3z + 8, y = -z - 4$ 이다.  
따라서 해가 무수히 많다.

10.  $\begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 & 17 \\ -15 & 21 & -9 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 101 \end{bmatrix}$   
 $0z = 101$  이므로 해가 없다.

11.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -14 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$2x - 3y - 3z + 6w = 2, y + z - 2w = 0$  이므로

$x = 1, y = -z + 2w, z$ 와  $w$ 는 임의의 실수이다.

따라서 해가 무수히 많다.

12.  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & 5 & 15 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & 5 & 15 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x - y + 2z = 0, 5w = 15$  이므로  $x = y - 2z, w = 3, y$ 와

$z$ 는 임의의 실수이다. 따라서 해가 무수히 많다.

$$\begin{aligned}
 13. \quad & \begin{bmatrix} 0 & 10 & 4 & -2 & 14 \\ -3 & -15 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 8 & -5 & 5 & -10 & 26 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & -15 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & -2 & 14 \\ 8 & -5 & 5 & -10 & 26 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -12 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 10 & 4 & -2 & 14 \\ 0 & -13 & -3 & -10 & -22 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -12 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 22/3 & -1/3 & 29 \\ 0 & 0 & -22/3 & -73/6 & -83/2 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -12 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 22/3 & -1/3 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & -25/2 & -25/2 \end{bmatrix} \\
 & -\frac{25}{2}z = -\frac{25}{2}, \frac{22}{3}y - \frac{1}{3}z = 29, -12x + 4y + 2z = 18, \\
 & w + x + y = 6 \text{ 이므로 } w=2, x=0, y=4, z=1 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -11 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -7 & 2 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & 5 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -11 & 1 \\ 3 & 4 & -7 & 2 & -7 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -10 & 11 & -10 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 7 & -16 & 11 & -16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & -10 & 11 & -10 \\ 0 & 7 & -16 & 11 & -16 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & -7y + 14z = -7, 5x - 5y - 5z = -5, w - x + 3y - 3z = 3 \\
 & \text{이므로 } w=0, x=3z, y=2z+1, z \text{ 는 임의의} \\
 & \text{실수이다. 따라서 해가 무수히 많다.}
 \end{aligned}$$

15. (a) 행 교환이 동치관계를 만족한다.

동일률(reflexivity) : 교환한 두 행을 다시  
교환하면 원래 행렬이 된다.

대칭성(symmetry) : 행렬  $A$ 의 행을 교환하여  
행렬  $B$ 를 얻었다면, 그 과정을 역으로  
시행하여  $B$ 에서  $A$ 를 얻을 수 있다.

추이성(transitivity) :  $A$ 의 행을 교환하여  $B$ 를  
얻고  $B$ 의 행을 교환하여  $C$ 를 얻었다면,  
그 과정을 모두  $A$ 에 적용하여  $C$ 를 얻을  
수 있다.

(b) 한 행에 다른 행의 상수 배를 더하는 것이  
동치관계를 만족한다.

동일률 : 한 행에 다른 행의 0 배를 더하면 원래  
행렬이 된다.

대칭성 :  $A$ 의 한 행에 다른 행의  $c$  배를 더하여  
 $B$ 를 얻었다면  $B$ 의 한 행에 다른 행의  $-c$   
배를 더하면  $A$ 를 얻는다.

추이성 :  $A$ 의 한 행에 다른 행의 상수 배를  
더하여  $B$ 를 얻고  $B$ 의 한 행에 다른 행의  
상수 배를 더하여  $C$ 를 얻었다면 그 과정을  
 $A$ 에 적용하여  $C$ 를 얻을 수 있다.

(c) 한 행을 0 아닌 수로 상수 배를 하는 것이  
동치관계를 만족한다.

동일률 : 한 행에 1 배를 하면 원래 행렬이 된다.

대칭성 :  $A$ 의 한 행을  $c (c \neq 0)$  배하여  $B$ 를

얻었다면  $B$ 의 한 행을  $1/c$  배하면  $A$ 를  
얻는다.

추이성 :  $A$ 의 한 행을 0 아닌 수로 상수 배를  
하여  $B$ 를 얻고  $B$ 의 한 행을 0 아닌 수로  
상수 배를 하여  $C$ 를 얻었다면 그 과정을  
 $A$ 에 적용하여  $C$ 를 얻을 수 있다.

17. 주어진 조건을 모델링하면

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, -I_1 - I_2 + I_3 = 0, 4I_2 + I_3 = 32,$$

$$4I_1 + I_3 = 16 \text{ 이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 32 \\ 4 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 32 \\ 0 & -4 & 5 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 6 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6I_3 = 48, 4I_2 + I_3 = 32, I_1 + I_2 - I_3 = 0 \text{ 이므로}$$

$$I_1 = 2, I_2 = 6, I_3 = 8 \text{ 이다}$$

18. 주어진 조건을 모델링하면

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0, -I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

$$4I_1 + 12I_2 = 12 + 24, 12I_2 - 8I_3 = 24 \text{ 이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & 0 & 36 \\ 0 & 12 & -8 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 4 & 36 \\ 0 & 12 & -8 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & -8 & 24 \\ 0 & 16 & 4 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & -8 & 24 \\ 0 & 0 & 44/3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{44}{3}I_3 = 4, 12I_2 - 8I_3 = 24, I_1 - I_2 - I_3 = 0 \text{ 이므로}$$

$$I_1 = \frac{27}{11}, I_2 = \frac{24}{11}, I_3 = \frac{3}{11} \text{ 이다.}$$

19. 주어진 조건을 모델링하면

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, -I_1 - I_2 + I_3 = 0, -R_1I_2 = E_0,$$

$$R_1I_2 + R_2I_3 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -R_1 & 0 & E_0 \\ 0 & R_1 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_1 & 0 & E_0 \\ 0 & 0 & R_2 & E_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -R_1 & 0 & E_0 \\ 0 & 0 & R_2 & E_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2I_3 = E_0, -R_1I_2 = E_0, I_1 + I_2 - I_3 = 0 \text{ 이므로}$$

$$I_1 = \frac{(R_1 + R_2)E_0}{R_1R_2}, I_2 = -\frac{E_0}{R_1}, I_3 = \frac{E_0}{R_2} \text{ 이다.}$$

20. 주어진 조건에서 저항  $R_0$ 에는 전류가 흐르지

$$\text{않으므로 } I_2R_x = I_3R_1, I_2R_3 = I_3R_2 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1}{R_2}, R_x = \frac{R_1}{R_2}R_3 \text{ 이다.}$$

21. 각 분기점에서의 값을 계산하면  $x_1 + x_4 = 1000,$

$$x_1 + x_2 = 1600, x_3 + x_4 = 1600, x_2 + x_3 = 2200 \text{ 이다.}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1000 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1600 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1600 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2200 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1600 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1600 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 + x_4 = 1600$ ,  $x_2 - x_4 = 600$ ,  $x_1 + x_4 = 1000$  이므로  
 $x_1 = 1000 - x_4$ ,  $x_2 = 600 + x_4$ ,  $x_3 = 1600 - x_4$ ,  $x_4$  는 임의의 실수이다.

22. 주어진 조건에서  $D_1 = S_1$ ,  $D_2 = S_2$  이므로

$$D_1 + 2P_1 + 2P_2 = 33, D_1 - 4P_1 + 2P_2 = 3,$$

$$D_2 - 4P_1 + 3P_2 = 16, D_2 - 4P_2 = 1 \text{ 이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 33 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 33 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -15 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 33 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 33 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -35 \end{bmatrix}$$

$$-8P_2 = -35, -6P_1 = -30, D_2 - 4P_1 + 3P_2 = 16,$$

$$D_1 + 2P_1 + 2P_2 = 33 \text{ 이므로 } D_1 = \frac{57}{4}, D_2 = \frac{183}{8},$$

$$P_1 = 5, P_2 = \frac{35}{8} \text{ 이다.}$$

23. 주어진 조건을 모델링하면

$$3x_1 = x_3, 8x_1 = 2x_4, 2x_2 = 2x_3 + x_4 \text{ 이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$8x_3 - 6x_4 = 0, 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, 3x_1 - x_3 = 0 \text{ 이다.}$$

이를 만족하는 가장 작은 양수는

$$x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 3, x_4 = 4 \text{ 이다.}$$

24. (a)  $A$  가  $4 \times n$  행렬이라 하고, 이 행렬의 행들을 차례대로  $a_1, a_2, a_3, a_4$  하 하자. 즉

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \text{ 이고 } a_i (i = 1, \dots, 4) \text{ 는 } 1 \times n \text{ 행렬이다.}$$

$$\text{그러면, } E_1 A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_4 \end{bmatrix}, E_2 A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -5a_1 + a_3 \\ a_4 \end{bmatrix},$$

$$E_3 A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 8a_4 \end{bmatrix} \text{ 가 되므로, 각각 두 번째 행과 세}$$

번째 행을 교환하는 기본 연산, 세 번째 행에 첫

번째 행의  $-5$ 배를 더하는 기본 연산, 네 번째 행을 8 배하는 기본 연산이다.

$$v = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T \text{ 라 하면 } E_1 v = [v_1 \ v_3 \ v_2 \ v_4]^T,$$

$$E_2 v = [v_1 \ v_2 - 5v_1 + v_3 \ v_4]^T, E_3 v = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ 8v_4]^T \text{ 이다.}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \text{ 이라 하면 } E_1 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},$$

$$E_2 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -5a_{11} + a_{31} - 5a_{12} + a_{32} - 5a_{13} + a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},$$

$$E_3 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 8a_{41} & 8a_{42} & 8a_{43} \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \text{ 이라 하면,}$$

$$B = E_3 E_2 E_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = E_3 E_2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$= E_3 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ -5a_{11} + a_{21} - 5a_{12} + a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ -5a_{11} + a_{21} - 5a_{12} + a_{22} \\ 8a_{41} & 8a_{42} \end{bmatrix},$$

$$C = E_1 E_2 E_3 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = E_1 E_2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ 8a_{41} & 8a_{42} \end{bmatrix}$$

$$= E_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ -5a_{11} + a_{31} - 5a_{12} + a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -5a_{11} + a_{31} - 5a_{12} + a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ 8a_{41} & 8a_{42} \end{bmatrix}$$

이므로  $B \neq C$  이다.

(b)  $A$  에 기본 연산을 한 번 시행하여  $M$  을 얻었다고 하자. 이제 그 기본 연산을  $I_n$  에

적용하여 얻어지는 기본 행렬  $E$  를  $A$  에 곱하는 것이 이 행렬에 원래의 기본 연산을 적용하는 것이므로  $M = EA$  을 얻는다.

## 1.4 Linear Independence Rank of a Matrix Vector Space

1.  $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  이므로 rank는 1이고  
행공간의 기저는  $[-2 \ 4 \ -6]$  이다.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{이므로 열공간의 기저는} \\ [-2 \ 1]^T \text{이다.}$$

2.  $a=b=0$ 이면 주어진 행렬은 **0**행렬이다.

따라서 rank는 0이다.

$a=0, b \neq 0$ 이면

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \text{이므로 rank는 2이고}$$

행공간 및 열공간의 기저는  $[-b \ 0], [0 \ -b]$  이다.

$a \neq 0, b=0$ 이면

$$\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \text{이므로 rank는 2이고}$$

행공간 및 열공간의 기저는  $[2a \ 0], [0 \ a]$  이다.

$a \neq 0, b \neq 0$ 이면

$$\begin{bmatrix} 2a & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2a & -b \\ 0 & 2a^2 - b^2 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

$2a^2 = b^2$ 이면 rank는 1이고

행공간 및 열공간의 기저는  $[2a \ -b]$  이다.

$2a^2 \neq b^2$ 이면 rank는 2이고

행공간 및 열공간의 기저는  $[2a \ -b], [0 \ 2a^2 - b^2]$  이다.

3.  $\begin{bmatrix} 005 \\ 350 \\ 500 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 500 \\ 350 \\ 005 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 500 \\ 050 \\ 005 \end{bmatrix}$  이므로 rank는 3이고

행공간의 기저는  $[500], [050], [005]$  이다.

$$\begin{bmatrix} 035 \\ 050 \\ 500 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 500 \\ 050 \\ 035 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 500 \\ 050 \\ 005 \end{bmatrix} \text{이므로 열공간의}$$

기저는  $[500]^T, [050]^T, [005]^T$  이다.

4.  $\begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 37 \end{bmatrix}$

이므로 rank는 3이고 행공간의 기저는

$[4 \ -6 \ 0], [0 \ 1 \ 4], [0 \ 0 \ 37]$  이다.

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 37 \end{bmatrix} \text{이므로 열공간의 기저는}$$

$[4 \ -6 \ 0]^T, [0 \ 1 \ 4]^T, [0 \ 0 \ 37]^T$  이다.

5.  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

이므로 rank는 3이고 행공간의 기저는

$[2 \ -2 \ 1], [0 \ 4 \ 8], [0 \ 0 \ -1]$  이다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 202 \\ 042 \\ 083 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{이므로 열공간의}$$

기저는  $[2 \ 0 \ 2]^T, [0 \ 4 \ 2]^T, [0 \ 0 \ -1]^T$  이다.

6.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

이므로 rank는 2이고 행공간의 기저는

$[-1 \ 0 \ -4], [0 \ 1 \ 0]$  이다.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{이므로 열공간의}$$

기저는  $[1 \ 0 \ 4]^T, [0 \ -1 \ 0]^T$  이다.

7.  $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

이므로 rank는 2이고 행공간의 기저는

$[6 \ 0 \ -3 \ 0], [0 \ -1 \ 0 \ 5]$  이다.

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{이므로 열공간의 기저는}$$

$[6 \ 0 \ 2]^T, [0 \ -1 \ 0]^T$  이다.

8.  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 16 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 16 & 2 \\ 2 & 16 & 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & -24 & -60 & -126 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 12 & 0 & -12 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 12 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & -24 & -60 & -126 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 12 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & -60 & -150 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 12 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -60 & -150 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 4이고 행공간의 기저는

$[2 \ 4 \ 8 \ 16], [0 \ 12 \ 0 \ -12], [0 \ 0 \ -60 \ -150], [0 \ 0 \ 0 \ -30]$  이다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 16 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 8 & 16 \\ 8 & 4 & 16 & 8 \\ 16 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 16 & 4 & 2 \\ 0 & -24 & 0 & 12 \\ 0 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & -126 & -30 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 16 & 4 & 2 \\ 0 & -24 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & -30 & -75 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 16 & 4 & 2 \\ 0 & -24 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -30 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$

이므로 열공간의 기저는  $[2 \ 16 \ 4 \ 2]^T,$

$[0 \ -24 \ 0 \ 12]^T, [0 \ 0 \ -30 \ -75]^T, [0 \ 0 \ 0 \ -30]^T$  이다.

9.  $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 3이고 행공간의 기저는

$[1 \ 1 \ 1 \ 1], [0 \ -5 \ -4 \ -5], [0 \ 0 \ -1 \ 0]$  이다.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 열공간의 기저는  $[1 \ -1 \ 1 \ 1]^T,$

$[0 \ 5 \ -4 \ -5]^T$ ,  $[0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ 이다.

$$10. \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 18 & 56 & -10 \\ 0 & -8 & -26 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 3이고 행공간의 기저는

$[1 \ -4 \ -11 \ 2]$ ,  $[0 \ 1 \ 2 \ 0]$ ,  $[0 \ 0 \ 20 \ -10]$ 이다.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 열공간의 기저는

$[1 \ -4 \ -11 \ 2]^T$ ,  $[0 \ 1 \ 2 \ 0]^T$ ,  $[0 \ 0 \ 20 \ -10]^T$ 이다.

11. (a)  $a_{jk} = j+k-1$ 이므로

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -n+1 \\ 0 & -2 & -4 & \cdots & -2n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -n+1 & -2n+2 & \cdots & -n^2+2n-1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -n+1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이다.

(b)  $a_{jk} = j+k+c$ 이므로

$$A = \begin{bmatrix} 2+c & 3+c & 4+c & \cdots & n+1+c \\ 3+c & 4+c & 5+c & \cdots & n+2+c \\ 4+c & 5+c & 6+c & \cdots & n+3+c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n+1+c & n+2+c & n+3+c & \cdots & 2n+c \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2+c & 3+c & 4+c & \cdots & n+1+c \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이다.

(c)  $a_{jk} = 2^{i+k-2}$ 이므로

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 2^2 & 2^3 & 2^4 & \cdots & 2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n-1} & 2^n & 2^{n+1} & \cdots & 2^{2n-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 1이다.

12. 정리 3에 의하여  $AB$ 와  $(AB)^T$ 는 같은 계수를 갖는다. 식 (10d)에 의하여  $(AB)^T = B^T A^T$ 이므로  $\text{rank } B^T A^T = \text{rank } AB$ 이다.

13.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이라 하면  $\text{rank } A = \text{rank } B = 1$

이다.  $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이므로  $\text{rank } A^2 = 1$ 이고

$\text{rank } B^2 = 0$ 이다. 따라서  $\text{rank } A = \text{rank } B$ 은

성립하지만  $\text{rank } A^2 = \text{rank } B^2$ 은 성립하지 않는다.

14.  $A$ 가  $n \times p$  ( $n < p$ )인 행렬이라 하자.  $A$ 는  $n$ 개의 성분을 갖는  $p$ 개의 열벡터를 갖는다. 정리 4에 의하여 열벡터들은 일차종속이다.

15.  $A$ 가  $n \times n$ 인 정방행렬이라 하면  $A$ 의 행벡터, 열벡터는  $n$ 개다.  $A$ 의 행벡터가  $A^T$ 의 열벡터와 같으므로  $A^T$ 의 열벡터는 일차독립이다. 정리 3에 의하여  $\text{rank } A^T = n$ 이다. 따라서  $\text{rank } A = n$ 이고  $A$ 의 일차독립인 열벡터도  $n$ 개다. 즉 열벡터도 일차독립이다.

16.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이라 하면  $\text{rank } A = 1$ 이고

$\text{rank } B = 2$ 이다.  $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이므로  $\text{rank } AB = 0$

이다. 따라서 두 행렬의 곱에 의하여 얻어진 행렬의 rank는 두 행렬의 rank 어느 것보다도 크지 않다.

$$17. \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & -8 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 & -2 \\ 0 & -13 & 19 & 9 \\ 0 & -14 & 24 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 & -2 \\ 0 & -13 & 19 & 9 \\ 0 & 0 & 46/13 & -35/13 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 3이고 일차독립이다.

$$18. \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{45} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{12} & \frac{1}{112} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{40} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{120} \\ 0 & 0 & \frac{1}{120} & \frac{7}{700} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{40} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{120} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2800} \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 4이고 일차독립이다.

$$19. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 3이고 일차독립이다.

$$20. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이고 일차종속이다.

$$21. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 3이고 일차종속이다.

$$22. \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3.0 & -0.6 & 1.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0.2 \\ 3.0 & -0.6 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이고 일차종속이다.

$$23. \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이고 일차독립이다.

$$24. \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 8 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & -13 & 23 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 197/8 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 3이고 일차종속이다.

$$25. \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -16 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 3이고 일차독립이다.

$$26. \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 12 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 주어진 벡터들은 일차종속이다.

3열과 4열은 0이 아닌 첫 번째 성분을 가지고 있지 않으므로 3번째와 4번째 벡터를 제거한다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 이 세 벡터는 일차독립이다.

27. 2차원 벡터공간이며 기저는  $[1 \ 1 \ 0]$ ,  $[4 \ 0 \ 1]$ 이다.

28.  $k \neq 0$ 이면  $\mathbf{0}$ 을 포함하지 않으므로 벡터공간이 아니다.  $k=0$ 이면 2차원 벡터공간이고 기저는  $[1 \ 0 \ 0]$ ,  $[0 \ 1 \ -3]$ 이다.

29.  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2]$ 가 원소이면  $v_1 \leq v_2$ ,  $-v_1 \geq -v_2$ 이므로  $-\mathbf{v}$ 는 원소가 아니다. 따라서 벡터공간이 아니다.

30. 2차원 벡터공간이며 기저는  $n-1$ 번 성분만 1인 벡터( $v_{n-1}=1$ ,  $v_j=0$  ( $j \neq n-1$ ))인 벡터  $\mathbf{v} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0]$ 와  $n$ 번 성분만 1인 벡터( $v_n=1$ ,  $v_j=0$  ( $j \neq n$ ))인 벡터  $\mathbf{v} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1]$ 이다.

31. 성분이 음수인 벡터만 가지므로  $\mathbf{0}$ 은 원소가 아니다. 따라서 벡터공간이 아니다.

32. 1차원 벡터공간이며 기저는  $[-5 \ 4 \ 23]$ 이다.

33. 1차원 벡터공간이며 기저는  $[3 \ 10 \ 9]$ 이다.

34.  $v_1=1$ ,  $v_j=0$  ( $2 \leq j \leq n$ )인 벡터  $\mathbf{v} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ 은 원소이지만  $2\mathbf{v} = [2 \ 0 \ \dots \ 0]$ 은 원소가 아니므로 벡터공간이 아니다.

35. 1차원 벡터공간이며 기저는  $[24 \ 12 \ 8 \ 6]$ 이다.

## 1.7 Determinants. Cramer's Rule

1. 정리 1에서

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \text{이고} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \text{이다.}$$

(b) 1행의 -3배를 2행에 더한다.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \text{이고} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \text{이다.}$$

(c) 1행에 4배를 한다.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \text{이고} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8 \text{이다.}$$

정리 2에서

$$(d) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \text{이고} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \text{이다.}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0 \text{이다.}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$$

2. 첫 번째 행에 대해 전개하면  $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

이고 두 번째 행에 대해 전개하면

$D = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$ 이다. 첫 번째 열에 대해

전개하면  $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ 이고 두 번째 열에 대해

전개하면  $D = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$ 이므로 모두 같은

값을 갖는다.

3. 두 번째 행에 대해 전개하면

$$D = -2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ = -2(6 - 0) + 6(2 - 0) - 4(0 + 3) = -12$$

세 번째 행에 대해 전개하면

$$D = -1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ = -1(12-0) - 0(4-0) + 2(6-6) = -12$$

첫 번째 열에 대해 전개하면

$$D = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \\ = 1(12-0) - 3(4+4) + 0(0+6) = -12$$

두 번째 열에 대해 전개하면

$$D = -3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ = -3(4+4) + 6(2-0) - 0(4-0) = -12$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1(1 \cdot 3 \cdot 4) = -12$$

4.  $n$  차 확장행렬 계산에  $n!$  번의 계산이 필요하고 각 계산마다  $10^{-9}$  sec의 시간이 소요된다고 가정하면 표에서의 값들을 얻게 된다.

5.  $\mathbf{A}$ 가  $1 \times 1$  행렬이면  $k\mathbf{A} = [ka_{11}]$  이므로

$$\det(k\mathbf{A}) = ka_{11} = k \det \mathbf{A} \text{ 이다.}$$

$\mathbf{A}$ 가  $(n-1) \times (n-1)$  행렬일 때,  $\det(k\mathbf{A}) = k^{n-1} \det \mathbf{A}$  라 가정하자.

$$\mathbf{A} \text{가 } n \times n \text{ 행렬이면 } k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

$M_{ij}$ 를  $i$ 행과  $j$ 열을 소거하여 얻은  $\mathbf{A}$ 의 부분행렬

이라 하면, 가정에 의하여  $i$ 행과  $j$ 열을 소거하여 얻은  $k\mathbf{A}$ 의 부분행렬의 행렬식은  $k^{n-1}M_{ij}$ 이다.

따라서

$$\det(k\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n ka_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^n ka_{ij} (-1)^{i+j} k^{n-1} M_{ij} \\ = k^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} = k^n \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} = k^n \det \mathbf{A}.$$

수학적 귀납법에 의하여  $\det(k\mathbf{A}) = k^n \det \mathbf{A}$ 이다.

6. 첫 번째 행원소들의 소행렬식은

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ 이고}$$

여인수는  $C_{11} = M_{11}$ ,  $C_{12} = -M_{12}$ ,  $C_{13} = M_{13}$ 이다.

세 번째 행원소들의 소행렬식은

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ 이고}$$

여인수는  $C_{31} = M_{31}$ ,  $C_{32} = -M_{32}$ ,  $C_{33} = M_{33}$ 이다.

$$7. \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

$$8. \begin{vmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 1.5 & -0.5 \end{vmatrix} = -0.2 - 0.9 = -1.1$$

$$9. \begin{vmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{vmatrix} = \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1$$

$$10. \begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$$11. \begin{vmatrix} 6 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 6(8-0) = 48$$

$$12. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix} \\ = a(a^2 - bc) - c(ac - b^2) + c(c^2 - ab) \\ = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$13. \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -0.25 & 7.25 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = 17$$

$$14. \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 216$$

$$15. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$16. \det \mathbf{A}_n = (-1)^{n-1} (n-1)$$

증명.

$$n=2 \text{ 일 때 } \det \mathbf{A}_2 = (-1)^{2-1} (2-1) = -1 \text{ 이므로}$$

성립한다.

$$n=k \text{ 일 때 성립한다고 가정하면 } n=k+1 \text{ 일 때}$$

행렬의 첫 행을 첫 번째 항을 제외한 모든 항은

0이 되도록 만든다. 방법은

$$\text{Row } 1 - \frac{1}{k-1} (\text{Row } 2 + \text{Row } 3 + \cdots + \text{Row } (k+1))$$

그러면 제 1행의 1열의 값은  $-\frac{k}{k-1}$ 이 되고 다른

항은 모두 0이 되므로

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A}_{k+1} &= -\frac{k}{k-1}(-1)^{1+1} \cdot \det \mathbf{A}_k \\ &= -\frac{k}{k-1} \cdot (-1)^{k-1}(k-1) = (-1)^k k.\end{aligned}$$

따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 공식은 성립한다.

17.  $\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$  이므로 rank는 2이다.

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -8 & -6 \\ 16 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 12 \\ 0 & -24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 이므로 rank는 2이다.}$$

18.  $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 4 & 0 & 10 \\ -6 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -480 \neq 0$  이므로 rank는 3이다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 4 & 0 & 10 \\ -6 & 10 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & -6 \\ -6 & 10 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 10 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 3이다.

19.  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 8 \end{vmatrix} = 0$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$  이므로 rank는 2이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이다.

20. (a)  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}$$

$$= -(x-x_1)(y_2-y_1) + (y-y_1)(x_2-x_1) = 0$$

이므로  $(x-x_1)(y_2-y_1) = (y-y_1)(x_2-x_1)$  이고

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \text{ 이다.}$$

(b) 평면의 방정식 :  $ax+by+cz+d \cdot 1=0$

$$D = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ 이고}$$

$$9x + 12y - 6z - 15 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } 3x + 4y - 2z = 5 \text{ 이다.}$$

(c) 원의 방정식 :  $a(x^2+y^2)+bx+cy+d \cdot 1=0$

$$D = \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 52 & 6 & 4 & 1 \\ 50 & 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 이므로}$$

$$(x^2+y^2) \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 40 & 6 & 1 \\ 52 & 4 & 1 \\ 50 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 40 & 2 & 1 \\ 52 & 6 & 1 \\ 50 & 7 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 40 & 2 & 6 \\ 52 & 6 & 4 \\ 50 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 이고}$$

$$-10(x^2+y^2)+40x+20y+200=0 \text{ 이다. 따라서}$$

$$x^2+y^2-4x-2y-20=0, (x-2)^2+(y-1)^2=25$$

이다.

(d) 구의 방정식 :

$$a(x^2+y^2+z^2)+bx+cy+dz+e \cdot 1=0$$

$$D = \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 25 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 17 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 17 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 이므로}$$

$$(x^2+y^2+z^2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 25 & 0 & 5 & 1 \\ 17 & 0 & 1 & 1 \\ 17 & 4 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 25 & 0 & 5 & 1 \\ 17 & 4 & 1 & 1 \\ 17 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 25 & 0 & 0 & 1 \\ 17 & 4 & 0 & 1 \\ 17 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 25 & 0 & 0 & 5 \\ 17 & 4 & 0 & 1 \\ 17 & 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{이 고 } 128(x^2+y^2+z^2)-256z-1920=0 \text{ 이다.}$$

따라서

$$x^2+y^2+z^2-2z+15=0, x^2+y^2+(z-1)^2=16$$

이다.

(e) 일반원뿔 곡선 :

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f \cdot 1=0$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 이다.}$$

21.  $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 21$ ,  $D_1 = \begin{vmatrix} 5.15 & -1 \\ 6.15 & 9 \end{vmatrix} = 52.5$ ,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5.15 \\ 3 & 6.15 \end{vmatrix} = -3.15 \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{52.5}{21} = 2.5, y = \frac{-3.15}{21} = -0.15 \text{ 이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5.15 \\ 3 & 9 & 6.15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5.15 \\ 0 & 10.5 & -1.575 \end{bmatrix}$$

$$10.5y = -1.575, 2x - y = 5.15 \text{ 이므로}$$

$$x = 2.5, y = -0.15 \text{ 이다.}$$

22.  $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 24$ ,  $D_1 = \begin{vmatrix} -24 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -48$ ,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -24 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 120 \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{-48}{24} = -2, y = \frac{120}{24} = 5 \text{ 이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -24 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & -24 \\ 0 & 12 & 60 \end{bmatrix}$$

$12y=60$ ,  $2x-4y=-24$  이므로  $x=-2$ ,  $y=5$  이다.

$$23. D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 30, D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = -30$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 30, D_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

따라서  $x = \frac{-30}{30} = -1$ ,  $y = \frac{30}{30} = 1$ ,  $z = \frac{0}{30} = 0$  이다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

$15z=0$ ,  $2y-3z=2$ ,  $-x+4z=1$  이므로

$x=-1$ ,  $y=1$ ,  $z=0$  이다.

$$24. D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix} = -60, D_1 = \begin{bmatrix} 13 & -2 & 1 \\ 11 & 1 & 4 \\ -31 & 4 & -5 \end{bmatrix} = -60$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 3 & 13 & 1 \\ -2 & 11 & 4 \\ 1 & -31 & -5 \end{bmatrix} = 180, D_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 13 \\ -2 & 1 & 11 \\ 1 & 4 & -31 \end{bmatrix} = -240$$

따라서  $x = \frac{-60}{-60} = 1$ ,  $y = \frac{180}{-60} = -3$ ,  $z = \frac{-240}{-60} = 4$

이다.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 13 \\ -2 & 1 & 4 & 11 \\ 1 & 4 & -5 & -31 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & -31 \\ -2 & 1 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & -31 \\ 0 & 9 & -6 & -51 \\ 0 & -14 & 16 & 106 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & -31 \\ 0 & 9 & -6 & -51 \\ 0 & -14 & 16 & 106 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & -31 \\ 0 & 9 & -6 & -51 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{bmatrix}$$

## 1.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

$$1. \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -5 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -5 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 10 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

이므로 역행렬은  $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$  이다.

$10z=40$ ,  $9y-6z=-51$ ,  $x+4y-5z=-31$  이므로

$x=1$ ,  $y=-3$ ,  $z=4$  이다.

$$25. D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 8, D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -8$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 8, D_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} = 16$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = -16$$

따라서  $w = \frac{-8}{8} = -1$ ,  $x = \frac{8}{8} = 1$ ,  $y = \frac{16}{8} = 2$ ,

$z = \frac{-16}{8} = -2$  이다.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$-4z=8$ ,  $2y-4z=12$ ,  $x+y-2z=7$ ,  $w-2x+z=-5$

이므로  $w=-1$ ,  $x=1$ ,  $y=2$ ,  $z=-2$  이다.

$$2. \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & 1 & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \tan 2\theta & \sec 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \tan 2\theta & \sec 2\theta & 0 \\ 0 & \sec 2\theta & \tan 2\theta & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \tan 2\theta & \sec 2\theta & 0 \\ 0 & 1 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & 1 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

이므로 역행렬은  $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$  이다.

$$3. \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0.75 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 5 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{15}{4} & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} - \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & \frac{15}{32} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{5}{2} - \frac{115}{64} \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & \frac{15}{32} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{이므로 역행렬은 } \begin{bmatrix} \frac{25}{2} & \frac{5}{2} - \frac{115}{64} \\ -5 & 0 & \frac{15}{32} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \text{이다.}$$

4. 정사각행렬이 아니므로 역행렬이 존재하지 않는다.

$$5. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{이므로 역행렬은 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

$$6. \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{이므로 역행렬은 } \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -13 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

$$7. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{이므로 역행렬은 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로 역행렬은 존재하지 않는다.

$$9. \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{이므로 역행렬은 } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

$$10. \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{이므로 역행렬은 } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{이다.}$$

$$11. \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 5 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \text{이므로 } (\mathbf{A}^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \text{이다.}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{이므로 } (\mathbf{A}^{-1})^2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

이다. 따라서  $(\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2$ 이다.

12. 식 (1)에 의하여  $(\mathbf{A}^2)(\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{I}$ 이다. 양변의

왼쪽에  $\mathbf{A}^{-1}$ 을 곱하면  $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^2)(\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}$ ,



$\mathbf{A}(\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ 이다. 다시 양변의 왼쪽에  $\mathbf{A}^{-1}$ 을 곱하면  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ ,  $(\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2$ 이다.

$$13. \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -5 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \text{이므로 } (\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

이다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{이므로 } (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

이다. 따라서  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ 이다.

$$14. \mathbf{I} = \mathbf{I}^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T \text{이다.}$$

$\mathbf{I} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T$ 에서 양변의 왼쪽에  $(\mathbf{A}^T)^{-1}$ 를 곱하면  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ 이다.

$$15. (\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{I} \text{에서 양변의 왼쪽에 } \mathbf{A} \text{를 곱하면 } (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} \text{이다.}$$

16. 문제 2번의 행렬은  $2\theta$ 만큼 회전했을 때 생성되는 행렬이다. 역은  $-2\theta$ 만큼 회전했을 때 생성되므로 문제 2번의 행렬에서  $2\theta$ 를  $-2\theta$ 로 바꾸므로 역행렬을 구할 수 있다.

17.  $\mathbf{A}$ 가  $a_{jk} = 0$  ( $j > k$ )인 삼각행렬이라 하자.

$C_{kj} = 0$  ( $j > k$ )이므로 역행렬  $\mathbf{A}^{-1}$ 도 삼각행렬이다.

18. 문제 7번의 주어진 행렬은  $y = z$  평면에 대한 대칭이동을 의미하므로 역행렬은 자기 자신과 같다. 즉  $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ 이다.

$$19. \det \mathbf{A} = 0.64$$

$$C_{11} = 8, C_{12} = -3.2, C_{13} = 0, C_{21} = 1.6, C_{22} = 0, C_{23} = 0, C_{31} = -1.15, C_{32} = 0.3, C_{33} = 0.08$$

따라서

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{0.64} \begin{bmatrix} 8 & 1.6 & -1.15 \\ -3.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{115}{64} \\ -5 & 0 & \frac{15}{32} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

이다.

$$20. \det \mathbf{A} = -4$$

$$C_{11} = 1, C_{12} = 0, C_{13} = 0, C_{21} = 0, C_{22} = -20, C_{23} = 12, C_{31} = 0, C_{32} = 52, C_{33} = -32$$

따라서

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 52 \\ 0 & 12 & -32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -13 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

이다.

## 1.9 Vector Spaces, Inner Product Space, Linear Transformations

$$1. [1 \ 0]^T, [0 \ 1]^T \text{와 } [1 \ 1]^T, [-1 \ 1]^T \text{와 } [1 \ 0]^T, [0 \ -1]^T$$

2. 실수  $k_j$  ( $1 \leq j \leq n$ )에 대하여  $\mathbf{v} = k_1 \mathbf{a}_{(1)} + \cdots + k_n \mathbf{a}_{(n)}$ 이라 하자.  $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{a}_{(1)} + \cdots + c_n \mathbf{a}_{(n)}$ 이므로  $(c_1 - k_1) \mathbf{a}_{(1)} + \cdots + (c_n - k_n) \mathbf{a}_{(n)} = \mathbf{0}$ 이다.  $\mathbf{a}_{(1)}, \dots, \mathbf{a}_{(n)}$ 이 일차독립이므로  $c_j = k_j$  ( $1 \leq j \leq n$ )이다. 따라서 벡터  $\mathbf{v}$ 의 표현은 유일하다.

3. 1차원 벡터공간이며 기저는  $[3 \ 2 \ 1]^T$ 이다.

4. 3차원 벡터공간이며 기저는

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

5. 덧셈에 대한 역원이 존재하지 않으므로 벡터공간이 아니다.

6. 2차원 벡터공간이며 기저는  $\cos 2x, \sin 2x$ 이다.

7. 2차원 벡터공간이며 기저는  $xe^{-x}, e^{-x}$ 이다.

8.  $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$ 이므로 벡터공간이 아니다.

9. 3차원 벡터공간이며 기저는  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 이다.

10. 4차원 벡터공간이며 기저는

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

$$11. \begin{bmatrix} 0.25 & -0.50 \\ 1.50 & -1.00 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{0.5} \begin{bmatrix} -1.00 & 0.50 \\ -1.50 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.00 & 1.00 \\ -3.00 & 0.50 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -2.00y_1 + 1.00y_2, x_2 = -3.00y_1 + 0.50y_2 \text{이다.}$$

$$12. \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -0.2y_1 + 0.4y_2, x_2 = 0.8y_1 - 0.6y_2 \text{이다.}$$

$$13. \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -10 & 16 & 1 \\ -7 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2y_1 - 3y_2, x_2 = -10y_1 + 16y_2 + y_3,$$

$$x_3 = -7y_1 + 11y_2 + y_3 \text{이다.}$$

$$14. \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{20}{5} & -\frac{10}{5} & \frac{10}{5} \\ -\frac{10}{5} & -\frac{20}{5} & \frac{20}{5} \\ -\frac{20}{5} & \frac{10}{5} & \frac{40}{5} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{20}{5}y_1 - \frac{10}{5}y_2 + \frac{10}{5}y_3,$$

$$x_2 = -\frac{10}{5}y_1 - \frac{20}{5}y_2 + \frac{20}{5}y_3,$$

$$x_3 = -\frac{20}{5}y_1 + \frac{10}{5}y_2 + \frac{40}{5}y_3$$

이다.

$$15. \|[2 \ -1 \ -3]^T\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

16.  $\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}^T \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{26}{36}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$
17.  $\| [1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1] \|^T = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
18.  $\| [-4 \ 8 \ -1] \|^T = \sqrt{16+64+1} = \sqrt{81} = 9$
19.  $\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}^T \right\| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25} + 0} = \sqrt{\frac{14}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{5}$
20.  $\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$
21. 두 벡터가 직교하기 위하여  $-4 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}k = 0$ 을 만족하여야 한다. 따라서  $k=7$ 이다.
22.  $2v_1 + v_3 = 0, v_3 = -2v_1$  이므로  $[2 \ 0 \ 1]$  과 직교하는 벡터는  $[v_1 \ v_2 \ -2v_1]$  이다. 이는 2차원 벡터공간이며 기저는  $[1 \ 0 \ -2], [0 \ 1 \ 0]$  이다.
23.  $\mathbf{a} = [2 \ -1 \ -3]^T, \mathbf{b} = [-4 \ 8 \ -1]^T$  이라 하자.  
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [-2 \ 7 \ -4]^T$  이므로  
 $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{4+49+16} = \sqrt{69} \approx 8.31$  이다.  
 $\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| = \sqrt{4+1+9} + \sqrt{16+64+1} = \sqrt{14} + 9 \approx 12.74$

- 이므로  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$  이다.
24.  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}^T, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}^T$ 라 하자.  
 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{10} + \frac{2}{15} - \frac{3}{10} = -\frac{1}{15}$  이므로  $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \frac{1}{15}$  이다.  
 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{26}}{6},$   
 $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{5}$  이므로  
 $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| = \frac{\sqrt{26}}{6} \cdot \frac{\sqrt{14}}{5} = \frac{\sqrt{91}}{15}$  이다.  
따라서  $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$  이다.
25.  $\mathbf{a} = [5 \ 3 \ 2]^T, \mathbf{b} = [3 \ 2 \ -1]^T$  라 하면  
 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{25+9+4} = \sqrt{38}, \|\mathbf{b}\| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$   
이므로  $\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = 38+14=52$  이다.  
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [8 \ 5 \ 1]^T, \mathbf{a} - \mathbf{b} = [2 \ 1 \ 3]^T$  이므로  
 $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{64+25+1} = \sqrt{90},$   
 $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$  이다.  
즉,  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 90+14=104$  이다.  
따라서  
 $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$  이다.

## Chapter 1 Review Questions and Problems

- 행렬의 곱에서는 숫자의 곱과는 다른 세 가지 성질이 있다.
  - (1) 일반적으로  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$  이다.
  - (2)  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  이 반드시  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  또는  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  또는  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  을 의미하지는 않는다.
  - (3)  $\mathbf{AC} = \mathbf{AD}$  가 반드시  $\mathbf{C} = \mathbf{D}$  ( $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  일 때)를 의미하지는 않는다.
- 정의되는 연산 :  $\mathbf{A}^2, \mathbf{AB}, \mathbf{AA}^T, \mathbf{B}^T \mathbf{A}, \mathbf{B}^T \mathbf{B}, \mathbf{BB}^T, \mathbf{B}^T \mathbf{AB}$   
 정의되지 않는 연산 :  $\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{B}^2, \mathbf{BA}$
- 해를 갖지 않는 연립방정식의 예  
 $: x + y = 1, x + y = 0$   
 유일한 해를 갖는 연립방정식의 예  
 $: x + y = 1, x - y = 0$   
 무수히 많은 해를 갖는 연립방정식의 예  
 $: x + y = 1, 2x + 2y = 2$
- 정의되는 연산 :  $\mathbf{Ca}, \mathbf{C}^T \mathbf{a}, \mathbf{a}^T \mathbf{C}$   
 정의되지 않는 연산 :  $\mathbf{Ca}^T, \mathbf{aC}, (\mathbf{Ca}^T)^T$
- 행렬 곱셈의 동기는 선형 변환에 있다. 즉 두 선형 변환의 합성에서 행렬의 곱셈이 튀어 나온다.
- 정의역이  $X = \mathbb{R}^n$  이고 공역이  $X = \mathbb{R}^m$  인 선형변환에 의한 상은 적당한  $m \times n$  행렬의 곱으로 표현된다.
- 행렬의 일차독립인 행벡터의 최대수를 행렬의 rank라 한다.

- 행렬의 rank는 행렬의 일차독립인 열벡터의 최대수와 같다.
- 행렬의 rank가  $r$  이면 0이 아닌 행렬식을 갖는  $r \times r$  부분행렬이 존재하고, 행렬의  $r+1$  또는 그 이상의 행을 갖는 모든 정방부분행렬의 행렬식은 0이다.
8. 계수행렬의 rank가 첨가행렬의 rank보다 작으면 연립방정식이 해를 갖지 않는다.  
 계수행렬과 첨가행렬이 같은 rank를 가지며 행의 개수와 같을 때 연립방정식이 유일해를 갖는다.  
 계수행렬과 첨가행렬이 같은 rank를 가지며 행의 개수보다 작을 때 연립방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
9. Gauss 소거법은 선형연립방정식의 해를 구하는데 있어서 표준적인 방법이다. 이것은 체계적인 소거 과정으로 계산시간과 기억요구량이 합리적이고, 실용성이 있는 매우 중요한 방법이다.  
 일반적으로 연립방정식을 풀기 위하여 가감법을 시행하는데 이것이 Gauss 소거이다.  
 후치환은 Gauss 소거에 의하여 정리된 연립방정식의 해를 구하기 위하여 대입법을 사용하는 것에 동기화 되었다.
10. 역행렬은 원래 행렬과의 곱이 단위행렬이 되는 행렬이다. 원래 행렬의 rank가 그 행렬의 행의 개수와 같을 때 역행렬이 존재한다. 행렬식과 여인자를 써서 역행렬을 구할 수 있다.

$$11. \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$12. \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$13. \mathbf{Au} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}^T \mathbf{A} = [4 \ 0 \ -1]$$

$$14. \mathbf{u}^T \mathbf{v} = -1, \mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$15. \mathbf{u}^T \mathbf{Au} = 5, \mathbf{v}^T \mathbf{Bv} = [-1 \ -5 \ -1] \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2$$

$$16. \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -1 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$17. \det \mathbf{A} = -5, \det \mathbf{A}^2 = 25, (\det \mathbf{A})^2 = 25, \det \mathbf{B} = -5$$

$$18. (\mathbf{A}^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{25} & \frac{3}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{53}{25} & \frac{27}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{27}{25} & \frac{18}{25} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{25} & \frac{3}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{53}{25} & \frac{27}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{27}{25} & \frac{18}{25} \end{bmatrix}$$

$$19. \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \\ -6 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$20. (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)(\mathbf{B} - \mathbf{B}^T) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \\ -4 & -16 & -8 \end{bmatrix}$$

$$21. D = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 12 & -5 & -3 \\ -6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -150, D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 34 & -5 & -3 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -600,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 12 & 34 & -3 \\ -6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 300, D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 12 & -5 & 34 \\ -6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1200$$

$$x = \frac{-600}{-150} = 4, y = \frac{300}{-150} = -2, z = \frac{-1200}{-150} = 8 \text{ 이다.}$$

$$22. \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 8 & 9 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 8 & 9 & -3 & 2 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{21}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & \frac{49}{5} & -\frac{23}{5} & -\frac{46}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{21}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{3} & -\frac{40}{3} \end{bmatrix} \\ -\frac{20}{3}z = -\frac{40}{3}, \frac{21}{5}y - \frac{7}{5}z = -\frac{14}{5}, 5x - 3y + z = 7$$

이므로  $x = 1, y = 0, z = 2$ 이다.

$$23. \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 & 60 \\ 2 & -4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & 4 \\ 9 & 3 & -6 & 60 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & 21 & -42 & 42 \end{bmatrix}$$

$$21y - 42z = 42, 2x - 4y + 8z = 4 \text{ 이므로}$$

$x = 6, y = 2z + 2$ ,  $z$ 는 임의의 실수이다.

$$24. \begin{bmatrix} -6 & 39 & -9 & -12 \\ 2 & -13 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -13 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2x - 13y + 3z = 4 \text{ 이므로 } x = \frac{13}{2}y - \frac{3}{2}z + 2, y, z \text{ 는}$$

임의의 실수이다.

$$25. z = \frac{1.19}{0.7} = 1.7,$$

$$y = \frac{-2.53 + 0.8 \times 1.7}{0.9} = -1.3,$$

$$x = \frac{3.24 - 1.3 \times 1.7 + 0.7 \times (-1.3)}{0.3} = 0.4$$

$$26. \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ -4 & -6 & 14 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$0 \cdot z = 13$ 이므로 해가 없다.

$$27. \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -5 & -0.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$y = -0.5, -x + 2y = 0$ 이므로  $x = -1, y = -0.5$ 이다.

$$28. D = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 12 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -80, D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -20,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 12 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 40, D_3 = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 12 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -120$$

$$x = \frac{-20}{-80} = \frac{1}{4}, y = \frac{40}{-80} = -\frac{1}{2}, z = \frac{-120}{-80} = \frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

$$29. \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 9 & 3 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 21 & -42 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이고

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 & 60 \\ 2 & -4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & 4 \\ 9 & 3 & -6 & 60 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & 21 & -42 & 42 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이다. 따라서 하나의 미지수가 임의의 실수로 남는다.

$$30. \begin{bmatrix} -6 & 39 & -9 \\ 2 & -13 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -13 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 1이고

$$\begin{bmatrix} -6 & 39 & -9 & -12 \\ 2 & -13 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -13 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 1이다. 따라서 두 개의 미지수가 임의의 실수로 남는다.

$$31. \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이고

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -5 & -0.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이다.

따라서 유일한 해가 존재한다.

$$32. \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -4 & -6 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 1이고

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ -4 & -6 & 14 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

이므로 rank는 2이다. 따라서 해가 없다.

33. 주어진 조건을 모델링하면

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad 20I_3 - 10I_2 = 0, \quad 10I_2 = 110 \text{ 이므로}$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0, \quad I_2 - 2I_3 = 0, \quad I_2 = 11 \text{ 이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$2I_3 = 11, \quad I_2 - 2I_3 = 0, \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0 \text{ 이므로}$$

$$I_1 = 16.5, \quad I_2 = 11, \quad I_3 = 5.5 \text{ 이다.}$$

34. 주어진 조건을 모델링하면

$$I_1 + I_2 = I_3, \quad 10I_3 + 5I_1 = 220, \quad 20I_2 + 10I_3 = 240 \text{ 이므로}$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad I_1 + 2I_3 = 44, \quad 2I_2 + I_3 = 24 \text{ 이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 44 \\ 0 & 2 & 1 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 44 \\ 0 & 2 & 1 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 44 \\ 0 & 0 & 7 & 112 \end{bmatrix}$$

$$7I_3 = 112, \quad -I_2 + 3I_3 = 44, \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0 \text{ 이므로}$$

$$I_1 = 12, \quad I_2 = 4, \quad I_3 = 16 \text{ 이다.}$$

35. 주어진 조건을 모델링하면

$$I_1 = I_2 - I_3, \quad 10I_1 - 30I_3 = 10, \quad 30I_3 + 20I_2 = 130 \text{ 이므로}$$

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0, \quad I_1 - 3I_3 = 1, \quad 2I_2 + 3I_3 = 13 \text{ 이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

$$11I_3 = 11, \quad I_2 - 4I_3 = 1, \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0 \text{ 이므로}$$

$$I_1 = 4, \quad I_2 = 5, \quad I_3 = 1 \text{ 이다.}$$



## CHAPTER 2

# 선형대수: 행렬의 고유값 문제

## 2.1 The Matrix Eigenvalue Problem. Determining Eigenvalues, Eigenvectors

1.  $D(\lambda) = \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)(3 - \lambda) = 0$  이므로  $\lambda = \frac{3}{2}, 3$  이다.

$\lambda = \frac{3}{2}$  이면  $x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[10]^T$  이다.

$\lambda = 3$  이면  $x_1 = 0$  이므로 고유벡터는  $[01]^T$  이다.

2.  $D(\lambda) = \lambda^2 = 0$  이므로  $\lambda = 0$  (중근)이고 고유벡터는  $[10]^T$  와  $[01]^T$  이다.

3.  $D(\lambda) = (3 - \lambda)(-6 - \lambda) + 18 = 0$  이므로  $\lambda = 0, -3$  이다.

$\lambda = 0$  이면  $3x_1 - 2x_2 = 0$  이므로  $x_1 = 2, x_2 = 3$  이고 고유벡터는  $[2\ 3]^T$  이다.

$\lambda = -3$  이면  $6x_1 - 2x_2 = 0$  이므로  $x_1 = 1, x_2 = 3$  이고 고유벡터는  $[1\ 3]^T$  이다.

4.  $D(\lambda) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = 0$  이므로  $\lambda = 0, 5$  이다.

$\lambda = 0$  이면  $x_1 + 2x_2 = 0$  이므로  $x_1 = 2, x_2 = -1$  이고 고유벡터는  $[2\ -1]^T$  이다.

$\lambda = 5$  이면  $-4x_1 + 2x_2 = 0$  이므로  $x_1 = 1, x_2 = 2$  이고 고유벡터는  $[1\ 2]^T$  이다.

5.  $D(\lambda) = \lambda^2 + 16 = 0$  이므로  $\lambda = \pm 4i$  이다.

$\lambda = 4i$  이면  $-4ix_1 + 4x_2 = 0$  이므로  $x_1 = 1, x_2 = i$  이고 고유벡터는  $[1\ i]^T$  이다.

$\lambda = -4i$  이면  $4ix_1 + 4x_2 = 0$  이므로  $x_1 = 1, x_2 = -i$  이고 고유벡터는  $[1\ -i]^T$  이다.

6.  $D(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$  이므로  $\lambda = 1, 3$  이다.

$\lambda = 1$  이면  $x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[10]^T$  이다.

$\lambda = 3$  이면  $-2x_1 + 2x_2 = 0$  이므로  $x_1 = 1, x_2 = 1$  이고 고유벡터는  $[1\ 1]^T$  이다.

7.  $D(\lambda) = \lambda^2 = 0$  이므로  $\lambda = 0$  (중근)이다.  $x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[10]^T$  이다.

8.  $k > 0$  인 경우

$D(\lambda) = (a - \lambda)^2 + k = 0$  이므로  $\lambda = a \pm i\sqrt{k}$  이다.

$\lambda = a + i\sqrt{k}$  이면  $i\sqrt{k}x_1 + x_2 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = -i\sqrt{k}$  이고 고유벡터는  $[1\ -i\sqrt{k}]^T$  이다.

$\lambda = a - i\sqrt{k}$  이면  $-i\sqrt{k}x_1 + x_2 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = i\sqrt{k}$  이므로 고유벡터는  $[1\ i\sqrt{k}]^T$  이다.

$k < 0$  인 경우

$D(\lambda) = (a - \lambda)^2 + k = 0$  이므로  $\lambda = a \pm \sqrt{-k}$  이다.

$\lambda = a + \sqrt{-k}$  이면  $\sqrt{-k}x_1 + x_2 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = -\sqrt{-k}$  이므로 고유벡터는

$[1\ -\sqrt{-k}]^T$  이다.

$\lambda = a + \sqrt{-k}$  이면  $-\sqrt{-k}x_1 + x_2 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = \sqrt{-k}$  이므로 고유벡터는

$[1\ \sqrt{-k}]^T$  이다.

9.  $D(\lambda) = (0.20 - \lambda)^2 + 0.16^2 = 0$  이므로  $\lambda = 0.20 \pm 0.40i$  이다.

$\lambda = 0.20 + 0.40i$  이면  $-0.40ix_1 - 0.40x_2 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = -i$  이고 고유벡터는  $[1\ -i]^T$  이다.

$\lambda = 0.20 - 0.40i$  이면  $0.40ix_1 - 0.40x_2 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = i$  이고 고유벡터는  $[1\ i]^T$  이다.

10.  $D(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0$  이므로  $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta$  이다.  $\lambda = \cos\theta + i\sin\theta$  이면  $ix_1 + x_2 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = -i$  이고 고유벡터는  $[1\ -i]^T$  이다.

$\lambda = \cos\theta - i\sin\theta$  이면  $ix_1 - x_2 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = i$  이고 고유벡터는  $[1\ i]^T$  이다.

11.  $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$  이므로

$D(\lambda) = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0$  이고  $\lambda = 1, 4, 7$  이다.

$\lambda = 4$  이면  $2x_1 + x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -2$  이고 고유벡터는

$[1\ -2\ -2]^T$  이다.

12.  $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$  이므로

$D(\lambda) = (3 - \lambda)(4 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$  이므로  $\lambda = 3, 4, 1$  이다.

$\lambda = 3$  이면  $x_2 = 0, x_3 = 0$  이므로 고유벡터는

$[100]^T$  이다.

$\lambda = 4$  이면  $x_1 = 0, x_3 = 0$  이므로 고유벡터는

$[010]^T$  이다.

$\lambda = 1$  이면  $2x_1 - 7x_3 = 0, x_2 + 2x_3 = 0$  이므로

$x_1 = 7, x_2 = -4, x_3 = 2$  이므로 고유벡터는

$[7\ -4\ 2]^T$  이다.

13.  $\begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 & 2 \\ 2 & -\lambda & -8 \\ 5 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$  이므로

$D(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^2 = 0$  이므로

$\lambda = 2$  이다.  $x_1 - 2x_3 = 0, x_2 + 2x_3 = 0$  이므로

$x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1$  이고 고유벡터는

$[2\ -2\ 1]^T$  이다.

14.  $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$  이므로

$D(\lambda) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 (\lambda - 3)^2 = 0$  이므로  $\lambda = \frac{1}{2}, 3$  (중근) 이다.

$\lambda = \frac{1}{2}$  이면  $x_1 + \frac{7}{2}x_3 = 0, -\frac{25}{4}x_3 = 0$  이므로

$x_1 = 0, x_3 = 0$  이고 고유벡터는  $[0\ 1\ 0]^T$  이다.

$\lambda = 3$  이면  $x_1 + x_3 = 0, -\frac{5}{2}x_2 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$  이므로 고유벡터는

$[1 \ 0 \ -1]^T$  이다.

$$15. \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 12 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \text{ 이므로}$$

$D(\lambda) = (-1-\lambda)^2 [(-1-\lambda)^2 - 16] = 0$  이므로

$\lambda = 3, -5, -1$  (중근)이다.

$\lambda = 3$  이면  $-x_1 + 3x_3 = 0, -x_2 + 3x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0$

이므로  $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 1, x_4 = -1$  이고

고유벡터는  $[3 \ -3 \ 1 \ -1]^T$  이다.

$\lambda = -5$  이면  $x_1 + 3x_3 = 0, x_2 + 3x_4 = 0, x_3 - x_4 = 0$

이므로  $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = -1, x_4 = -1$  이고

고유벡터는  $[3 \ 3 \ -1 \ -1]^T$  이다.

$\lambda = -1$  이면  $x_3 = 0, x_4 = 0$  이므로 고유벡터는

$[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  와  $[0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  이다.

$$16. \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \text{ 이므로}$$

$D(\lambda) = \lambda^4 - 22\lambda^2 + 24\lambda + 45 = 0$  이므로  $\lambda = -5, -1, 3$  (중근)이다.

$\lambda = -5$  이면  $x_1 + 2x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 + 4x_4 = 0,$

$x_3 - 5x_4 = 0$  이므로  $x_1 = -11, x_2 = 1, x_3 = 5, x_4 = 1$

이고 고유벡터는  $[-11 \ 1 \ 5 \ 1]^T$  이다.

$\lambda = -1$  이면  $-x_1 + 2x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 + 2x_4 = 0,$

$x_2 + x_3 = 0$  이므로  $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = -1$

이고 고유벡터는  $[-3 \ 1 \ -1 \ -1]^T$  이다.

$\lambda = 3$  이면  $x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_4 = 0, -x_3 + x_4 = 0$

이므로  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$  이고

고유벡터는  $[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  이다.

$$17. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$D(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$  이므로  $\lambda = \pm i$  이다.  $\lambda = i$  이면

$-ix_1 - x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ -i]^T$  이다.

$\lambda = -i$  이면  $ix_1 - x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ i]^T$  이다.

$$18. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$D(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$  이므로  $\lambda = -1, 1$  이다.

$\lambda = -1$  이면  $x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 0]^T$  이다.

$\lambda = 1$  이면  $x_1 = 0$  이므로 고유벡터는  $[0 \ 1]^T$  이다.

$x_2$  축 위 임의의 점  $(0, y)$  가  $(0, -y)$  로 사상되므로

$[1 \ 0]^T$  이  $\lambda = -1$  에 대응하는 고유벡터이다.

$$19. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$D(\lambda) = -\lambda(1-\lambda) = 0$  이므로  $\lambda = 0, 1$  이다.  $\lambda = 0$  이면

$x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 0]^T$  이다.  $\lambda = 1$  이면

$x_1 = 0$  이므로 고유벡터는  $[0 \ 1]^T$  이다.

점  $(x, y)$  가  $(0, y)$  로 사상된다.  $x_2$  축 위의 점은

그 자신으로,  $x_1$  축 위의 점은 원점으로 사상된다.

$$20. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$D(\lambda) = (1-\lambda) \left[ \left( \frac{1}{2} - \lambda \right)^2 - \frac{1}{4} \right] = 0$  이므로

$\lambda = 0, 1$  (중근)이다.

$\lambda = 0$  이면  $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0, x_3 = 0$  이므로

$x_1 = 1, x_2 = -1$  고유벡터는  $[1 \ -1 \ 0]^T$  이다.

$\lambda = 1$  이면  $-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[1 \ 1 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1]^T$  이다.

평면  $x_2 = x_1$  위의 점은 그 자신으로, 직선

$x_2 = -x_1, x_3 = 0$  위의 점은 원점으로 사상된다.

21.  $2 \times 2$  행렬의 예

:  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  의 특성방정식은  $D(\lambda) = (\lambda - 2)^2 = 0$

이므로 고유치 2의  $M_\lambda = 2$  이다. 2에 대응하는

고유벡터는  $[1 \ -1]^T$  이므로  $m_\lambda = 1$  이다.

따라서 부족지수는 1이다.

$3 \times 3$  행렬의 예

:  $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$  의 특성방정식은  $D(\lambda) = -(\lambda - 9)^3 = 0$

이므로 고유치 9의  $M_\lambda = 3$  이다. 9에 대응하는

고유벡터는  $[-2 \ 2 \ -1]^T$  이므로  $m_\lambda = 1$  이다.

따라서 부족지수는 2이다.

22.  $2 \times 2$  행렬의 예

:  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  의 고유치는  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  이다.

$3 \times 3$  행렬의 예

:  $\begin{bmatrix} -10 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & -30 \\ -5 & -10 & 0 \end{bmatrix}$  의 고유치는  $\lambda_1 = \lambda_2 = -15,$

$\lambda_3 = 25$  이다.

23. 특성방정식에서 계수들이 실수이므로

특성방정식의 해는 실근을 가지거나 만약 허근을 갖는다면 켤레복소수도 근이다.

24.  $\mathbf{A}^{-1}$  이 존재한다는 것은  $\det \mathbf{A} \neq 0$  와 동치이다.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  이  $\mathbf{A}$  의 고유치이므로

$D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

이다.  $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$  이므로  $\det \mathbf{A} \neq 0$  와 0 은

$\mathbf{A}$  의 고유치가 아니라는 사실은 동치이다.

$\lambda \neq 0$  가  $\mathbf{A}$  의 고유치라면  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  이다. 양변에

$\mathbf{A}^{-1}$  을 곱하면  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$  이므로  $\frac{1}{\lambda} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$  이다.

따라서  $\frac{1}{\lambda}$  은  $A^{-1}$  의 고유치이다.

25.  $A$  를 정방행렬이라 하면  $A^T - \lambda I = (A - \lambda I)^T$  이므로

$$\det(A^T - \lambda I) = \det(A - \lambda I) \text{ 이다.}$$

따라서  $A^T$  의 고유치는  $A$  의 고유치와 같다.

## 2.2 Some Applications of Eigenvalue Problems

- $D(\lambda) = (0.50 - \lambda)^2 - 2.25 = 0$  이므로  $\lambda = -1, 2$  이다.  
 $\lambda = -1$  이면  $x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ -1]^T$  이고 주방향은  $-45^\circ$  이다.  
 $\lambda = 2$  이면  $-x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 1]^T$  이고 주방향은  $45^\circ$  이다.
- $D(\lambda) = (2.0 - \lambda)^2 - 0.16 = 0$  이므로  $\lambda = 1.6, 2.4$  이다.  
 $\lambda = 1.6$  이면  $x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ -1]^T$  이고 주방향은  $-45^\circ$  이다.  
 $\lambda = 2.4$  이면  $-x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 1]^T$  이고 주방향은  $45^\circ$  이다.
- $D(\lambda) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 8 = 0$  이므로  $\lambda = 3, -3$  이다.  
 $\lambda = -3$  이면  $4x_1 + 2\sqrt{2}x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ -\sqrt{2}]^T$  이고 주방향은  $-54.74^\circ$  이다.  
 $\lambda = 3$  이면  $-2x_1 + 2\sqrt{2}x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[\sqrt{2} \ 1]^T$  이고 주방향은  $35.26^\circ$  이다.
- $D(\lambda) = (5 - \lambda)(13 - \lambda) - 4 = 0$  이므로  $\lambda = 9 \pm 2\sqrt{5}$  이다.  
 $\lambda = 9 + 2\sqrt{5}$  이면  $(-4 - 2\sqrt{5})x_1 + 2x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 2 + \sqrt{5}]^T$  이고 주방향은  $76.72^\circ$  이다.  
 $\lambda = 9 - 2\sqrt{5}$  이면  $(-4 + 2\sqrt{5})x_1 + 2x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 2 - \sqrt{5}]^T$  이고 주방향은  $-13.28^\circ$  이다.
- $D(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0$  이므로  $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  이다.  
 $\lambda = \frac{1}{2}$  이면  $x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ -1]^T$  이고 주방향은  $-45^\circ$  이다.  
 $\lambda = \frac{3}{2}$  이면  $-x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 1]^T$  이고 주방향은  $45^\circ$  이다.
- $D(\lambda) = (1.25 - \lambda)^2 - 0.75^2 = 0$  이므로  $\lambda = \frac{1}{2}, 2$  이다.  
 $\lambda = \frac{1}{2}$  이면  $x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ -1]^T$  이고 주방향은  $-45^\circ$  이다.  
 $\lambda = 2$  이면  $-x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 1]^T$  이고 주방향은  $45^\circ$  이다.
- $A - I = \begin{bmatrix} -0.250 & 0.625 \\ 0.250 & -0.625 \end{bmatrix}$  이므로  $-0.250x_1 + 0.625x_2 = 0$  이고  $x_1 = 5, x_2 = 2$  이다.  
따라서  $[5 \ 2]^T$  이다.

- $A - I = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & -0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & -0.4 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   
이므로  $-6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, -5x_2 + 5x_3 = 0$  이고  
 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$  이다. 따라서  $[1 \ 1 \ 1]^T$  이다.
- $A - I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   
이므로  $-x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, 5x_2 + 2x_3 = 0$  이고  
 $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 5$  이다.  
따라서  $[-1 \ -2 \ 5]^T$  이다.
- $D(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{31}{4}\lambda + \frac{15}{4} = 0$  이므로  $\lambda = -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 3$  이다. 따라서 성장률은 3 이다.
- $D(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda + 12 = 0$  이므로  $\lambda = -3, -1, 4$  이다. 따라서 성장률은 4 이다.
- $p$  는 각 회사가 상품을 만드는데 투자된 총비용이고 얻어지는 수입은  $Ap = p$  이다.  
 $A - I = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & -1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & -0.4 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 8 & -10 & 4 \\ -9 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -50 & 36 \\ 0 & 50 & -36 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -50 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   
이므로  $x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, -50x_2 + 36x_3 = 0$  이고  
 $x_1 = 10, x_2 = 18, x_3 = 25$  이다.  
따라서  $c[10 \ 18 \ 25]^T, c > 0$  이다.
- k회사의 상품이 각 회사에서 소비되는 양을 모두 더하면 k회사의 총생산량과 같아야 한다.  $a_{jk}$  가 회사 k의 총생산 가운데 회사 j에서 소비되는 비율을 나타내므로  $\sum_{j=1}^n a_{jk} = 1$  이다.  
따라서 소비행렬의 열의 합은 1이다.  
 $A$  는  $A^T$  와 같은 고유치를 가지고  $A^T$  의 행의 합은 1이므로  $A$  는 고유치 1과 고유벡터  $[1 \ \dots \ 1]$  을 갖는다.
- $I - A = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 & -0.2 \\ -0.5 & 1 & -0.1 \\ -0.1 & -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$  이므로



$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{0.32} \begin{bmatrix} 0.56 & 0.32 & 0.24 \\ 0.31 & 0.52 & 0.19 \\ 0.3 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \text{ 이고}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{0.32} \begin{bmatrix} 0.56 & 0.32 & 0.24 \\ 0.31 & 0.52 & 0.19 \\ 0.3 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.64375 \\ 0.6875 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

16.  $D(\lambda) = (a_{11} - \lambda)C_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{j1} C_{j1}$   
 $= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)D_{11}$   
 $+ \sum_{j=3}^n (-1)^{j+2} a_{j2} D_{j2} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{j1} C_{j1}$   
 $= \dots$   
 $= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + P(\lambda)$   
 이다.  $(-1)^{j+1} a_{j1} C_{j1}$  은  $\lambda$ 에 대한  $n-2$ 차 다항식,  
 $(-1)^{j+2} a_{j2} D_{j2}$  은  $\lambda$ 에 대한  $n-3$ 차 다항식, ...  
 이므로  $P(\lambda)$  는  $\lambda$ 에 대한  $n-2$ 차 다항식이다.  
 따라서 특성방정식  $D(\lambda) = 0$  의  $\lambda^{n-1}$  의 계수를  
 구하면  $(-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$  이다.  
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  이  $\mathbf{A}$ 의 고유치이므로  
 $D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$  이고  $\lambda^{n-1}$  의  
 계수는  $(-1)^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$  이다.  
 따라서  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$  이다.

17.  $\mathbf{A} - k\mathbf{I}$ 의 특성방정식은  
 $\det[(\mathbf{A} - k\mathbf{I}) - \lambda\mathbf{I}] = \det[\mathbf{A} - (k + \lambda)\mathbf{I}] = 0$  이다.  
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  이  $\mathbf{A}$ 의 고유치이므로  
 $k + \lambda = \lambda_j \quad (1 \leq j \leq n)$  이다.  
 따라서  $\lambda = \lambda_j - k \quad (1 \leq j \leq n)$  이므로  
 $\lambda_1 - k, \lambda_2 - k, \dots, \lambda_n - k$  는  $\mathbf{A} - k\mathbf{I}$ 의 고유치이다.  
 $\mathbf{x}_j$  를  $\lambda_j$  에 대응하는  $\mathbf{A}$ 의 고유벡터라 하면  
 $\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j$  이다. 따라서  
 $(\mathbf{A} - k\mathbf{I})\mathbf{x}_j = \mathbf{A}\mathbf{x}_j - k\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j - k\mathbf{x}_j = (\lambda_j - k)\mathbf{x}_j$   
 이므로  $\mathbf{x}_j$  를  $\lambda_j - k$  에 대응하는  $\mathbf{A} - k\mathbf{I}$ 의 고유벡터  
 이다.
18.  $k\mathbf{A}$ 의 특성방정식은

$$\det(k\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\left[k\left(\mathbf{A} - \frac{\lambda}{k}\mathbf{I}\right)\right] = k^n \det\left(\mathbf{A} - \frac{\lambda}{k}\mathbf{I}\right) = 0$$

이다.  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  이  $\mathbf{A}$ 의 고유치이므로  $\frac{\lambda}{k} = \lambda_j$   
 $(1 \leq j \leq n)$  이다. 따라서  $\lambda = k\lambda_j \quad (1 \leq j \leq n)$  이므로  
 $k\lambda_1, k\lambda_2, \dots, k\lambda_n$  는  $k\mathbf{A}$ 의 고유치이다.  $\mathbf{x}_j$  를  $\lambda_j$  에  
 대응하는  $\mathbf{A}$ 의 고유벡터라 하면  $\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j$  이다.  
 따라서  $(k\mathbf{A})\mathbf{x}_j = k(\mathbf{A}\mathbf{x}_j) = k(\lambda_j \mathbf{x}_j) = (k\lambda_j)\mathbf{x}_j$  이므로  
 $\mathbf{x}_j$  를  $k\lambda_j$  에 대응하는  $k\mathbf{A}$ 의 고유벡터이다.  
 $\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j$ 의 양변에  $\mathbf{A}$ 를 곱하면  
 $\mathbf{A}^2 \mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{A}\mathbf{x}_j = \lambda_j^2 \mathbf{x}_j$  이다. 따라서  $\mathbf{A}^m \mathbf{x}_j = \lambda_j^m \mathbf{x}_j$   
 $(1 \leq j \leq n)$  이고  $\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$  은  $\mathbf{A}^m$ 의 고유치이다.

19. 문제 18번에 의하여

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= (k_m \mathbf{A}^m + k_{m-1} \mathbf{A}^{m-1} + \dots + k_1 \mathbf{A} + k_0 \mathbf{I}) \mathbf{x}_j \\ &= k_m \mathbf{A}^m \mathbf{x}_j + k_{m-1} \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{x}_j + \dots + k_1 \mathbf{A} \mathbf{x}_j + k_0 \mathbf{x}_j \\ &= k_m \lambda_j^m \mathbf{x}_j + k_{m-1} \lambda_j^{m-1} \mathbf{x}_j + \dots + k_1 \lambda_j \mathbf{x}_j + k_0 \mathbf{x}_j \\ &= (k_m \lambda_j^m + k_{m-1} \lambda_j^{m-1} + \dots + k_1 \lambda_j + k_0) \mathbf{x}_j \\ &= p(\lambda_j) \mathbf{x}_j \end{aligned}$$

이다. 따라서  $p(\lambda_j)$  는  $p(\mathbf{A})$ 의 고유치이고  $\mathbf{A}$ 와  
 같은 고유벡터를 갖는다.

$$\begin{aligned} 20. \det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & -\lambda & 0 \\ 0 & l_{32} & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + l_{12}l_{21}\lambda + l_{13}l_{21}l_{32} = 0 \end{aligned}$$

$l_{13}, l_{21}, l_{32}$  가 양수이므로  $\lambda \neq 0$  이다.

$\text{trace } \mathbf{L} = 0$  이므로 문제 16번에 의하여 고유치의  
 합은 0이다. 따라서 고유치가 모두 실수이면  
 적어도 하나의 고유치는 양수이다. 특성방정식의  
 허근은 켈레복소수로 존재하므로  $\lambda_1 = a + bi$  이면  
 $\lambda_2 = a - bi$  이다.  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = (a^2 + b^2)\lambda_3 = l_{13}l_{21}l_{32} > 0$   
 이므로  $\lambda_3 > 0$  이다. 따라서 양수인 고유치가  
 반드시 존재한다.

## 2.3 Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices

1. 직교행렬이다.

$$D(\lambda) = \left(\frac{3}{5} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0 \text{ 이므로 } \lambda = \frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i \text{ 이다.}$$

2.  $a = 0$  이면 반대칭행렬이다.

$$D(\lambda) = \lambda^2 + b^2 = 0 \text{ 이므로 } \lambda = \pm bi \text{ 이다.}$$

$b = 0$  이면 대칭행렬이다.

$$D(\lambda) = (a - \lambda)^2 = 0 \text{ 이므로 } \lambda = a \text{ 이다.}$$

$a \neq 0, b \neq 0, a^2 + b^2 = 1$  이면 직교행렬이다.

$$D(\lambda) = (a - \lambda)^2 + b^2 = 0 \text{ 이므로 } \lambda = a \pm bi \text{ 이다.}$$

$a \neq 0, b \neq 0, a^2 + b^2 \neq 1$  이면 세가지 모두 아니다.

$$D(\lambda) = (a - \lambda)^2 + b^2 = 0 \text{ 이므로 } \lambda = a \pm bi \text{ 이다.}$$

3. 세가지 모두 아니다.

$$D(\lambda) = (1 - \lambda)^2 + 16 = 0 \text{ 이므로 } \lambda = 1 \pm 4i \text{ 이다.}$$

4. 직교행렬이다.

$$D(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta \text{ 이다.}$$

5. 대칭행렬이다.

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ 이므로}$$

$$D(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \text{ 이고 } \lambda = 3, 2, -2 \text{ 이다.}$$

6. 대칭행렬이다.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & k & k \\ k & a - \lambda & k \\ k & k & a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ 이므로}$$

$$D(\lambda) = (a - \lambda)^3 - 3k^2(a - \lambda) + 2k^3 = 0 \text{ 이고}$$

$$\lambda = a + 2k, a - k \text{ (중근) 이다.}$$

7. 반대칭행렬이다.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ 이므로}$$

$$D(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{9}{4}\lambda = 0 \text{ 이고 } \lambda = 0, \pm \frac{3}{2}i \text{ 이다.}$$

8. 직교행렬이다.

$$D(\lambda) = (1-\lambda)[(\cos\theta-\lambda)^2 + \sin^2\theta] = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lambda = 1, \cos\theta \pm i\sin\theta \text{ 이다.}$$

9. 직교행렬이다.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ 이므로}$$

$$D(\lambda) = (-1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0 \text{ 이고 } \lambda = -1, \pm i \text{ 이다.}$$

10. 대칭행렬이며 동시에 직교행렬이다.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ 이므로}$$

$$D(\lambda) = \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)^3 - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-\lambda\right) - \frac{16}{27} = 0 \text{ 이고}$$

$$\lambda = -1, 1 \text{ (중근)이다.}$$

12. (a)  $A$ 와  $B$ 를 직교행렬이라 하자.

$$(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1} \text{ 이므로 } AB \text{도}$$

$$\text{직교행렬이다.}$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^T = A = (A^{-1})^{-1} \text{ 이므로 } A^{-1} \text{도}$$

$$\text{직교행렬이다.}$$

회전이동의 용어로 두 회전이동의 곱이나 회전이동의 역도 회전이동임을 의미한다.

$$(b) \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로 직교변환이다.

$$a_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \text{ 라 하면}$$

$$a_1 \cdot a_1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

$$a_1 \cdot a_2 = -\cos\theta \sin\theta + \sin\theta \cos\theta = 0,$$

$$a_2 \cdot a_2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{ 이므로 정리 3을}$$

$$\text{만족한다. 역변환은 } \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \text{ 은 } 53.13^\circ \text{ 회전이동이다.}$$

$$A^m \text{의 고유치는 } \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^m \text{ 과 } \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)^m \text{ 이므로}$$

$m \rightarrow \infty$  일 때 발산(원형 궤적을 따라 돈다)한다.

$$(d) (0.9A)^m \text{의 고유치는 } 0.9^m \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^m \text{ 과}$$

$$0.9^m \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)^m \text{ 이므로 } m \rightarrow \infty \text{이면 } 0 \text{으로}$$

수렴한다. 따라서 나선형 궤적을 따라간다.

$$(e) A = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

13. 예제 1번에서

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ 이므로 대칭행렬이다.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 12 \\ 9 & 0 & -20 \\ -12 & 20 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로 반대칭행렬이다.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ 이라 하면 } A^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{이므로 } AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

따라서  $A^T = A^{-1}$  이므로 직교행렬이다.

$$14. \begin{vmatrix} -\lambda & 9 & -12 \\ -9 & -\lambda & 20 \\ 12 & -20 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ 이므로 } D(\lambda) = \lambda^3 + 625\lambda = 0 \text{ 이고}$$

$$\lambda = 0, 25i, -25i \text{ 이다.}$$

$$15. A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ 라 하면 } \lambda = 8, 2 \text{ 이다. (8.2절 예제 1번)}$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ 라 하면 } \lambda = -1, -6 \text{ 이다. (8.2절 예제 4번)}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ 이므로 } \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{109}}{2} \text{ 이다.}$$

따라서  $A$ 와  $B$ 의 고유치의 합이  $A+B$ 의 고유치는 아니다.

$$16. Ax = \lambda x \text{ (} x \neq 0 \text{) 이고 } Ay = \mu y \text{ (} y \neq 0 \text{)라 하자. } A \text{가}$$

$$\text{대칭행렬이므로 } \lambda x^T = (Ax)^T = x^T A^T = x^T A \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \lambda x^T y = x^T Ay = \mu x^T y \text{ 이다. } \lambda \neq \mu \text{ 이므로}$$

$$x^T y = 0 \text{ 이다. 따라서 } x \text{와 } y \text{는 직교한다.}$$

17.  $A$ 가 반대칭행렬이고  $B = A^{-1}$ 라 하자.

$$B^T = B^T I = B^T (AB) = (B^T A) B$$

$$= (A^T B)^T B = (-AB)^T B = -I^T B = -IB = -B$$

이므로  $B$ 도 반대칭행렬이다.

18. No.

$A$ 가  $n \times n$  반대칭행렬이라 하고  $n$ 이 홀수라 하자.

$$\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$$

이므로  $\det A = 0$ 이다. 따라서  $A$ 는 특이행렬

(singular matrix)이다.

19. No.

반대칭행렬은 역행렬이 존재하지 않는다.(18번)

20. Yes. 예를 들면  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  이다.

## 2.4 Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

1.  $\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 12 \\ -50 & 25 \end{bmatrix}$  이다.  
 $D(\lambda) = (-25 - \lambda)(25 - \lambda) + 600 = 0$  이므로  $\lambda = \pm 5$  이다.  
 $\lambda = -5$  이면  $-5x_1 + 3x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda = 5$  이면  $-5x_1 + 2x_2 = 0$  이므로  
 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^T$  이다.

따라서  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}^T$  와  $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^T$  가  $\hat{\mathbf{A}}$  의 고유벡터이므로  
 $\begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix}^T$  와  $\begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}^T$  가  $\mathbf{A}$  의 고유벡터이다.

2.  $\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{9} & \frac{1}{18} \\ -\frac{80}{9} & \frac{11}{9} \end{bmatrix}$

이다.  $D(\lambda) = \left(-\frac{11}{9} - \lambda\right)\left(\frac{11}{9} - \lambda\right) + \frac{40}{81} = 0$  이므로

$\lambda = \pm 1$  이다.

$\lambda = -1$  이면  $-4x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda = 1$  이면  $-40x_1 + x_2 = 0$  이므로

고유벡터는  $\begin{bmatrix} 1 & 40 \end{bmatrix}^T$  이다.

즉  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}^T$  와  $\begin{bmatrix} 1 & 40 \end{bmatrix}^T$  가  $\hat{\mathbf{A}}$  의 고유벡터이므로

$\begin{bmatrix} 0 & -18 \end{bmatrix}^T$  와  $\begin{bmatrix} -36 & -162 \end{bmatrix}^T$  가  $\mathbf{A}$  의 고유벡터이다.

3.  $\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0.28 & -0.96 \\ 0.96 & 0.28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.28 & 0.96 \\ -0.96 & 0.28 \end{bmatrix}$   
 $= \begin{bmatrix} 3.008 & -0.544 \\ 5.456 & 6.992 \end{bmatrix}$

이다.  $D(\lambda) = (3.008 - \lambda)(6.992 - \lambda) + 2.968064 = 0$

이므로  $\lambda = 4, 6$  이다.

$\lambda = 4$  이면  $31x_1 + 17x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} 17 & -31 \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda = 6$  이면  $11x_1 + 2x_2 = 0$  이므로

고유벡터는  $\begin{bmatrix} 2 & -11 \end{bmatrix}^T$  이다.

$\begin{bmatrix} 17 & -31 \end{bmatrix}^T$  와  $\begin{bmatrix} 2 & -11 \end{bmatrix}^T$  가  $\hat{\mathbf{A}}$  의 고유벡터이므로

$\begin{bmatrix} -25 & -25 \end{bmatrix}^T$  와  $\begin{bmatrix} -10 & -5 \end{bmatrix}^T$  가  $\mathbf{A}$  의 고유벡터이다.

4.  $\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$   
 $= \begin{bmatrix} 15 & 0 & 26 \\ 6 & 3 & 10 \\ -8 & 0 & -14 \end{bmatrix}$

이다.  $D(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$  이므로

$\lambda = -1, 2, 3$  이다.  $\lambda = 3$  이면  $3x_1 + 5x_3 = 0, x_2 = 0$

이므로 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}^T$  이다.

따라서  $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}^T$  가  $\hat{\mathbf{A}}$  의 고유벡터이므로

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  가  $\mathbf{A}$  의 고유벡터이다.

5.  $\hat{\mathbf{A}} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 12 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 12 \\ 0 & -2 & 12 \end{bmatrix}$

이다.  $D(\lambda) = \lambda(4 - \lambda)(\lambda - 10) = 0$  이므로

$\lambda = 0, 4, 10$  이다.  $\lambda = 0$  이면  $x_1 - 2x_3 = 0,$

$x_2 - 6x_3 = 0$  이므로 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T$  이고

$\lambda = 4$  이면  $x_2 = 0, x_3 = 0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda = 10$  이면  $-3x_1 + x_3 = 0,$

$-x_2 + x_3 = 0$  이므로 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$  이다.

따라서  $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  와  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$  가  $\hat{\mathbf{A}}$  의

고유벡터이므로  $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$  와

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$  가  $\mathbf{A}$  의 고유벡터이다.

6. (a) 문제 1번에서  $\text{trace } \mathbf{A} = 3 + (-3) = 0$  이고

고유치의 합은  $5 + (-5) = 0$  이다.

문제 3번에서  $\text{trace } \mathbf{A} = 8 + 2 = 10$  이고

고유치의 합은  $4 + 6 = 10$  이다.

문제 5번에서  $\text{trace } \mathbf{A} = -2 + 4 + 12 = 14$  이고

고유치의 합은  $0 + 4 + 10 = 14$  이다.

- (b)  $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$  라 하면  $c_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} \ (1 \leq i \leq n)$  이다.

따라서  $\text{trace}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}$  이다.  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{B}\mathbf{A}$  라

하면  $\tilde{c}_{ii} = \sum_{j=1}^n b_{ij}a_{ji} \ (1 \leq i \leq n)$  이다. 따라서

$$\begin{aligned} \text{trace}(\mathbf{B}\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji}b_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji}b_{ij} = \text{trace}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \end{aligned}$$

이다.

- (c)  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  에서 왼쪽에  $\mathbf{P}^2$  을, 오른쪽에

$(\mathbf{P}^{-1})^2$  을 각각 곱하면

$$\mathbf{P}^2 \hat{\mathbf{A}} (\mathbf{P}^{-1})^2 = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}} \text{ 이다.}$$

- (d) 고유치의 순서를 바꾸려면  $\mathbf{X}$  에서 각 고유치에  
 대응하는 고유벡터의 순서를 바꾸면 된다.

7.  $2 \times 2$  행렬의 예

:  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  의 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$  이므로  $\mathbb{R}^2$  의

기저가 될 수 없다.

- $3 \times 3$  행렬의 예

:  $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$  의 고유벡터는  $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$  이므로

$\mathbb{R}^3$  의 기저가 될 수 없다.

8.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  이라 하면  $\mathbf{A}$  는 대칭행렬이다.

$\mathbf{A}$  의 고유치 4, 1, -2 에 대응하는 고유벡터가 각각

$$\mathbf{x}_1 = \left[ \frac{2}{3} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right]^T, \mathbf{x}_2 = \left[ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{1}{3} \right]^T,$$

$$\mathbf{x}_3 = \left[ \frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3} \right]^T \text{ 이다.}$$

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3 = 1,$$

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0, \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 0,$$

$$\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_1 = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = 0 \text{ 이므로 } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \text{ 은 정규 직교 기저이다.}$$

9.  $D(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 16 = 0$  이므로  $\lambda = -2, 6$  이다.

$\lambda = -2$  이면  $x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ -1]^T$  이고  $\lambda = 6$  이면  $-x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[1 \ 1]^T$  이다.  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  이므로

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

10.  $D(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$  이므로  $\lambda = \pm 1$  이다.

$\lambda = 1$  이면  $2x_1 - x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 2]^T$  이고  $\lambda = -1$  이면  $x_1 = 0$  이므로 고유벡터는

$[0 \ 1]^T$  이다.  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  이므로

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

11.  $D(\lambda) = (-19-\lambda)(16-\lambda) + 294 = 0$  이므로  $\lambda = 2, -5$

이다.  $\lambda = 2$  이면  $-3x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[1 \ 3]^T$  이고  $\lambda = -5$  이면  $-2x_1 + x_2 = 0$  이므로

고유벡터는  $[1 \ 2]^T$  이다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{D} = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

12.  $D(\lambda) = (-4.3-\lambda)(9.3-\lambda) - 10.01 = 0$  이므로

$\lambda = 10, -5$  이다.  $\lambda = 10$  이면  $13x_1 - 7x_2 = 0$  이므로

고유벡터는  $[7 \ 13]^T$  이고  $\lambda = -5$  이면  $x_1 + 11x_2 = 0$

이므로 고유벡터는  $[11 \ -1]^T$  이다.  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 13 & -1 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{X}^{-1} = -\frac{1}{150} \begin{bmatrix} -1 & -11 \\ -13 & 7 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{150} \begin{bmatrix} -1 & -11 \\ -13 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.3 & 7.7 \\ 1.3 & 9.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 13 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

이다.

13.  $D(\lambda) = (6-\lambda)(2-\lambda)(9-\lambda) = 0$  이므로  $\lambda = 6, 2, 9$

이다.  $\lambda = 6$  이면  $-3x_1 + x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0$  이므로

고유벡터는  $[1 \ 3 \ -1]^T$  이고,  $\lambda = 2$  이면

$x_1 = 0, -6x_2 + 7x_3 = 0$  이므로 고유벡터는  $[0 \ 7 \ 6]^T$

이며,  $\lambda = 9$  이면  $x_1 = 0, x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[0 \ 0 \ 1]^T$  이다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 25 & -6 & 7 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 25 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 21 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

이다.

14.  $D(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$  이므로  $\lambda = -2, 1, 4$

이다.  $\lambda = -2$  이면  $x_1 - x_3 = 0, 2x_2 - x_3 = 0$  이므로

고유벡터는  $[2 \ 1 \ 2]^T$  이고,  $\lambda = 1$  이면

$x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ -1 \ 0]^T$

이며,  $\lambda = 4$  이면  $x_1 = 0, x_2 - x_3 = 0$  이므로

고유벡터는  $[0 \ 1 \ 1]^T$  이다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = -\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{D} = -\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -6 & 6 \\ -9 & -8 & 12 \\ -12 & -12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

이다.

15.  $D(\lambda) = (-1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) = 0$  이므로  $\lambda = -1, 3, 5$

이다.  $\lambda = -1$  이면  $x_1 + 3x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0$  이므로

고유벡터는  $[-3 \ 1 \ 1]^T$  이고,  $\lambda = 3$  이면

$2x_1 + x_3 = 0, x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 0 \ -2]^T$

이며,  $\lambda = 5$  이면  $x_1 = 0, x_2 - x_3 = 0$  이므로

고유벡터는  $[0 \ 1 \ 1]^T$  이다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

이다.

16.  $D(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)(-2-\lambda) = 0$  이므로  $\lambda = 0, 2, -2$

이다.  $\lambda = 0$  이면  $x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0$  이므로

고유벡터는  $[1 \ -1 \ 0]^T$  이고,  $\lambda = 2$  이면

$x_1 + 3x_2 = 0, x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[0 \ 0 \ 1]^T$

이며,  $\lambda = -2$  이면  $x_1 - x_2 = 0, x_3 = 0$  이므로

고유벡터는  $[1 \ 1 \ 0]^T$  이다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

이다.

17.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (7-\lambda)^2 - 9 = 0$  이므로  $\lambda = 10, 4$  이다.

식 (10)에 의하여  $Q=10y_1^2+4y_2^2=200$  (타원)이다.

$\lambda=10$  이면  $-x_1+x_2=0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda=4$  이면  $x_1+x_2=0$  이므로

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$  이다.

따라서  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \mathbf{y}$  이다.

18.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (4-\lambda)(-4-\lambda)-9=0$  이므로  $\lambda = \pm 5$  이다.

식 (10)에 의하여  $Q=5y_1^2-5y_2^2=10$  (쌍곡선)이다.

$\lambda=5$  이면  $-x_1+3x_2=0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda=-5$  이면  $3x_1+x_2=0$

이므로  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}^T$  이다.

따라서  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \mathbf{y}$  이다.

19.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (3-\lambda)^2-121=0$  이므로  $\lambda=14, -8$  이다.

식 (10)에 의하여  $Q=14y_1^2-8y_2^2=0$  이다.

$\lambda=14$  이면  $-x_1+x_2=0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda=-8$  이면  $x_1+x_2=0$  이므로

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$  이다.

따라서  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \mathbf{y}$  이다.

20.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (9-\lambda)(1-\lambda)-9=0$  이므로  $\lambda=10, 0$  이다.

식 (10)에 의하여  $Q=10y_1^2=10$  이다.

$\lambda=10$  이면  $-x_1+3x_2=0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda=0$  이면  $3x_1+x_2=0$

이므로  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}^T$  이다.

따라서  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \mathbf{y}$  이다.

21.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (1-\lambda)^2-36=0$  이므로  $\lambda=7, -5$  이다.

식 (10)에 의하여  $Q=7y_1^2-5y_2^2=70$  (쌍곡선)이다.

$\lambda=7$  이면  $x_1+x_2=0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda=-5$  이면  $x_1-x_2=0$  이므로

$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$  이다.

따라서  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \mathbf{y}$  이다.

22.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (4-\lambda)(13-\lambda)-36=0$  이므로  $\lambda=16, 1$  이다.

식 (10)에 의하여  $Q=16y_1^2+y_2^2=16$  (타원)이다.

$\lambda=16$  이면  $-2x_1+x_2=0$  이므로  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$

이고  $\lambda=1$  이면  $x_1+2x_2=0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$  이다.

따라서  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \mathbf{y}$  이다.

23.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -11 & 42 \\ 42 & 24 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (-11-\lambda)(24-\lambda)-1764=0$  이므로

$\lambda=52, -39$  이다. 식 (10)에 의하여

$Q=52y_1^2-39y_2^2=156$  (쌍곡선)이다.

$\lambda=52$  이면  $-3x_1+2x_2=0$  이므로  $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}^T$

이고  $\lambda=-39$  이면  $2x_1+3x_2=0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}^T$  이다.

따라서  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \mathbf{y}$  이다.

24. 식 (9)에 의하여  $Q(\mathbf{x})$ 를 식 (10)으로 변환한다. 식

(9)의 역변환  $\mathbf{y} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}$ 가 존재하므로  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 와  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

사이에 일대일 대응이 존재한다.  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 에 대한

$Q(\mathbf{x})$ 의 값은 식 (10)의 우변과 같으므로 고유값이

모두 양수라는 조건과  $Q(\mathbf{x}) > 0$ 라는 조건은

동치이다. 또한 고유치가 모두 음수라는 조건과

$Q(\mathbf{x}) < 0$ 라는 조건도 동치이고 고유치가 양수와

음수를 모두 갖는다는 조건과  $Q(\mathbf{x})$ 가 양수와

음수를 모두 갖는다는 조건도 동치이다.

25. 문제 22번  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$ 에서

$a_{11}=4>0$ ,  $\det \mathbf{A} = 52-36=16>0$  이므로 positive definite이다.

문제 23번  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -11 & 42 \\ 42 & 24 \end{bmatrix}$ 에서

$a_{11} = -1 < 0$ ,  $\det \mathbf{A} = -264 - 1764 = -2028 < 0$  이므로

indefinite이다.

## 2.5 Complex Matrices and Forms.

1.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$  이면  $\overline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$  이므로

$\mathbf{A}$ 는 Hermitian이다.

$D(\lambda) = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0$  이므로  $\lambda = 1, 3$  이다.

$\lambda = 1$  이면  $x_1 + ix_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[i \ -1]^T$

이고  $\lambda = 3$  이면  $-x_1 + ix_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[i \ 1]^T$  이다.

2.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{bmatrix}$  이면  $\overline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} -i & -1-i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{A}$

이므로  $\mathbf{A}$ 는 skew-Hermitian이다.

$D(\lambda) = \lambda^2 - i\lambda + 2 = 0$  이므로  $\lambda = 2i, -i$  이다.

$\lambda = 2i$  이면  $-ix_1 + (1+i)x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[1+i \ i]^T$  이고  $\lambda = -i$  이면  $(-1+i)x_1 + ix_2 = 0$

이므로 고유벡터는  $[-i \ -1+i]^T$  이다.

3.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$  이면  $\overline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

이므로  $\mathbf{A}$ 는 세 가지 모두 아니다.

$D(\lambda) = \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)^2 + 2 = 0$  이므로  $\lambda = \frac{1}{4} \pm i\sqrt{2}$  이다.

$\lambda = \frac{1}{4} + i\sqrt{2}$  이면  $-x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[1 \ 1]^T$  이고  $\lambda = \frac{1}{4} - i\sqrt{2}$  이면  $x_1 + x_2 = 0$  이므로

고유벡터는  $[1 \ -1]^T$  이다.

4.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$  이면  $\overline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{A}$  이고

$\overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  이므로  $\mathbf{A}$ 는 skew-Hermitian이며

unitary이다.

$D(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$  이므로  $\lambda = \pm i$  이다.  $\lambda = i$  이면

$-x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 1]^T$  이고

$\lambda = -i$  이면  $x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[1 \ -1]^T$  이다.

5.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$  이면  $\overline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} = -\mathbf{A}$  이고

$\overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  이므로  $\mathbf{A}$ 는 skew-Hermitian이며

unitary이다.

$D(\lambda) = (-i - \lambda)^2(i - \lambda) = 0$  이므로  $\lambda = i, -i$  (중근)

이다.  $\lambda = i$  이면  $x_1 = 0, x_3 = 0$  이므로 고유벡터는

$[0 \ 1 \ 0]^T$  이고  $\lambda = -i$  이면  $x_2 = 0$  이므로

고유벡터는  $[1 \ 0 \ 0]^T$  과  $[0 \ 0 \ 1]^T$  이다.

6.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 0 & 2+2i \\ 0 & 2-2i & 0 \end{bmatrix}$  이면

$\overline{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2+2i & 0 \\ 2-2i & 0 & 2+2i \\ 0 & 2-2i & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$  이므로

$\mathbf{A}$ 는 Hermitian이다.

$D(\lambda) = -\lambda^3 + 16\lambda = 0$  이므로  $\lambda = 0, 4, -4$  이다.

$\lambda = 0$  이면  $x_2 = 0, (1-i)x_1 + (1+i)x_3 = 0$  이므로

고유벡터는  $[1+i \ 0 \ -1+i]^T$  이고

$\lambda = 4$  이면  $-2x_1 + (1+i)x_2 = 0, (1-i)x_2 - 2x_3 = 0$

이므로 고유벡터는  $[1+i \ 2 \ 1-i]^T$  이다.

$\lambda = -4$  이면  $2x_1 + (1+i)x_2 = 0, (1-i)x_2 + 2x_3 = 0$

이므로 고유벡터는  $[1+i \ -2 \ 1-i]^T$  이다.

7.  $\mathbf{S}_x$  에서  $D(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$  이므로  $\lambda = \pm 1$  이다.

$\lambda = 1$  이면  $-x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 1]^T$

이고  $\lambda = -1$  이면  $x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[1 \ -1]^T$  이다.

$\mathbf{S}_y$  에서  $D(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$  이므로  $\lambda = \pm 1$  이다.

$\lambda = 1$  이면  $-x_1 - ix_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[i \ -1]^T$  이고  $\lambda = -1$  이면  $x_1 - ix_2 = 0$  이므로

고유벡터는  $[i \ 1]^T$  이다.

$\mathbf{S}_z$  에서  $D(\lambda) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$  이므로  $\lambda = \pm 1$  이

다.  $\lambda = 1$  이면  $-2x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ 0]^T$

이고  $\lambda = -1$  이면  $2x_1 = 0$  이므로 고유벡터는

$[0 \ 1]^T$  이다.

$\mathbf{S}_x \mathbf{S}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = i \mathbf{S}_z,$

$\mathbf{S}_y \mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -i \mathbf{S}_z,$

$\mathbf{S}_x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{S}_y^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I},$

$\mathbf{S}_z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$

8.  $\mathbf{A}$  에서

$\lambda=9$  이면  $-5x_1 + (1-3i)x_2 = 0$  이므로

고유벡터는  $[1-3i \ 5]^T$  이고  $\lambda=2$  이면

$2x_1 + (1-3i)x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[1-3i \ -2]^T$  이다.

**B**에서

$\lambda=4i$  이면  $-ix_1 + (2+i)x_2 = 0$  이므로 고유벡터는

$[2+i \ i]^T$  이고  $\lambda=-2i$  이면  $5ix_1 + (2+i)x_2 = 0$

이므로 고유벡터는  $[2+i \ -5i]^T$  이다.

**C**에서

$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$  이면  $-x_1 + x_2 = 0$  이므로

고유벡터는  $[1 \ 1]^T$  이고  $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$  이면

$x_1 + x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $[1 \ -1]^T$  이다.

9.  $\bar{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & -3+2i \\ 3+2i & 2 \end{bmatrix}$  이므로 둘 다 아니다.

$$\begin{aligned} \bar{x}^T A x &= [1+i \ 1-i] \begin{bmatrix} 2 & 3-2i \\ -3-2i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} \\ &= [-3+3i \ 7-i] \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} = -8i \end{aligned}$$

10.  $\bar{A}^T = \begin{bmatrix} -i & 1-2i \\ -1-2i & 0 \end{bmatrix} = -A$  이므로

**A**는 skew-Hermitian이다.

$$\begin{aligned} \bar{x}^T A x &= [3 \ 2i] \begin{bmatrix} i & -1+2i \\ 1+2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2i \end{bmatrix} \\ &= [-4+5i \ -3+6i] \begin{bmatrix} 3 \\ 2i \end{bmatrix} = -24+9i \end{aligned}$$

11.  $\bar{A}^T = \begin{bmatrix} -i & 1 & 1-i \\ -1 & 0 & -2i \\ -1-i & -2i & -i \end{bmatrix} = -A$  이므로

**A**는 skew-Hermitian이다.

$$\begin{aligned} \bar{x}^T A x &= [-i \ -i \ i] \begin{bmatrix} i & -1 & -1+i \\ 1 & 0 & 2i \\ 1+i & 2i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ -i \\ i \end{bmatrix} \\ &= [0 \ -2+i \ 2+i] \begin{bmatrix} -i \\ -i \\ i \end{bmatrix} = 4i \end{aligned}$$

12.  $\bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & i & 4 \\ -i & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$  이므로 **A**는 Hermitian이다.

$$\begin{aligned} \bar{x}^T A x &= [1 \ i \ -i] \begin{bmatrix} 1 & i & 4 \\ -i & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix} \\ &= [2-4i \ 4i \ 4-2i] \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix} = -4-8i \end{aligned}$$

13. **A**는 Hermitian이고 **B**는 skew-Hermitian이고

**C**는 unitary이므로  $\bar{A}^T = A$  이고  $\bar{B}^T = -B$  이고

$\bar{C}^T = C^{-1}$  이다.

$$\begin{aligned} (\overline{ABC})^T &= (\overline{A} \overline{B} \overline{C})^T \\ &= \overline{C}^T \overline{B}^T \overline{A}^T = C^{-1} (-B) A = -C^{-1} B A \end{aligned}$$

이다.

14.  $BA = \begin{bmatrix} 3i & 2+i \\ -2+i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+19i & 23+10i \\ -5+3i & 1 \end{bmatrix},$

$$\overline{BA} = \begin{bmatrix} -1-19i & 23-10i \\ -5-3i & 1-7i \end{bmatrix}, \quad \overline{BA}^T = \begin{bmatrix} -1-19i & -5-3i \\ 23-10i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -AB &= -\begin{bmatrix} 4 & 1-3i \\ 1+3i & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3i & 2+i \\ -2+i & -i \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1+19i & 5+3i \\ -23+10i & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**A**는 Hermitian이고 **B**는 skew-Hermitian이므로

$\bar{A}^T = A$  이고  $\bar{B}^T = -B$  이다. 따라서

$$(\overline{BA})^T = (\overline{BA})^T = \bar{A}^T \bar{B}^T = A(-B) = -AB$$

이다.

15. **A**를 임의의 정방행렬이라 하자.

$$H = \frac{1}{2}(A + \bar{A}^T), \quad S = \frac{1}{2}(A - \bar{A}^T) \text{라 하면}$$

$$A = H + S.$$

$$\begin{aligned} \bar{H}^T &= \overline{\frac{1}{2}(A + \bar{A}^T)}^T \\ &= \frac{1}{2}(\bar{A} + A^T)^T = \frac{1}{2}(\bar{A}^T + A) = H \end{aligned}$$

이므로 **H**는 Hermitian이다.

$$\begin{aligned} \bar{S}^T &= \overline{\frac{1}{2}(A - \bar{A}^T)}^T \\ &= \frac{1}{2}(\bar{A} - A^T)^T = \frac{1}{2}(\bar{A}^T - A) = -S \end{aligned}$$

이므로 **S**는 skew-Hermitian이다.

16. **U**와 **V**를 unitary라 하자.

$$\overline{UV}^T = (\overline{UV})^T = \bar{V}^T \bar{U}^T = V^{-1} U^{-1} = (UV)^{-1}$$

이므로 **UV**도 unitary이다.

**A**를 unitary라 하고  $B = A^{-1}$ 라 하자.

$$\bar{B}^T = \overline{A^{-1}}^T = (\bar{A}^{-1})^T = (\bar{A}^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = B^{-1}$$

이므로 **B**도 unitary이다.

17.  $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}, \quad C^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$

$$C^3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = iI, \quad C^4 = iC, \quad C^5 = iC^2, \quad C^6 = i^2 I = -I,$$

$$C^7 = -C, \quad C^8 = -C^2, \quad C^9 = -iI, \quad C^{10} = -iC,$$

$$C^{11} = -iC^2, \quad C^{12} = -i^2 I = I$$

18. **A**가 Hermitian이면  $A \bar{A}^T = A^2 = \bar{A}^T A$  이다.

**A**가 skew-Hermitian이면

$$A \bar{A}^T = A(-A) = -A^2 = (-A)A = \bar{A}^T A \text{이다.}$$

$A$ 가 unitary이면

$$A\bar{A}^T = AA^{-1} = I = A^{-1}A = \bar{A}^T A \text{ 이다.}$$

19.  $A = H + S$ 이므로

$$\bar{A}^T = \overline{H+S}^T = (\bar{H} + \bar{S})^T = \bar{H}^T + \bar{S}^T = H - S \text{ 이고}$$

$$A\bar{A}^T = (H+S)(H-S) = H^2 + SH - HS - S^2,$$

$$\bar{A}^T A = (H-S)(H+S) = H^2 - SH + HS - S^2 \text{ 이다.}$$

$A$ 가 정규행렬(normal matrix)이면  $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$

이므로  $SH = HS$ 이다.

$SH = HS$ 이면  $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$ 이므로  $A$ 는 정규행렬이다.

20.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}$ 이라 하자.  $\bar{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이므로  $A$ 는

Hermitian도 skew-Hermitian도 아니다.

$$\bar{A}^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 이고 } A\bar{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 이므로 } A \text{는}$$

unitary도 normal도 아니다.

## Chapter 2 Review Questions and Problems

1. 고유값 문제  $Ax = \lambda x$ 에서 정방행렬  $A$ 는 주어지고 벡터  $x$ 와 스칼라  $\lambda$ 는 구하고자 한다.

2. Markov 과정을 이해하거나 단진자의 운동방정식을 푸는데 쓰인다.

3. 고유치는 특성방정식의 근이므로 모든 정방행렬은 고유치를 가진다.

4. 실수행렬이 복소수인 고유값을 가질 수 있다.

예를 들어

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{라 하면, } D(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lambda = \pm i \text{ 이다.}$$

또한 복소행렬이 실수인 고유값을 가질 수 있다.

예를 들어

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{이라 하면, } D(\lambda) = \lambda^2 - i\lambda = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lambda = 0, i \text{ 이다.}$$

5.  $5 \times 5$  실수행렬의 특성방정식은 계수가 모두 실수인 5차 다항식으로 5개의 근을 갖는다.

특성방정식이 복소근을 갖는다면 켈레복소수도 근이므로 복소수인 고유치는 쌍으로 존재한다.

따라서 반드시 실수인 고유치를 갖는다.

$5 \times 5$  복소행렬은 실수인 고유치를 갖지 않을 수도 있다.

6. 대수적 중복도는 고유방정식의 중근의 중복 정도를 의미한다.

7. 고유벡터들이  $\mathbb{C}^n$  (또는  $\mathbb{R}^n$ )의 기저가 될 수 있는데 이를 고유벡터의 기저(eigenbasis)라 한다.

행렬이 서로 다른 고유값을 가지면 고유벡터의 기저가 존재한다. 고유벡터가 기저가 된다는

사실은 행렬의 대각화에 주요한 역할을 한다.

8. 대칭행렬의 경우 직교하는 고유벡터를 찾을 수 있다.

9. 대칭행렬:  $A = A^T$ , 고유치가 모두 실수

반대칭행렬:  $A = -A^T$ , 고유치가 0이거나 순허수

직교행렬:  $A^T = A^{-1}$ , 고유치의 절댓값이 1

Hermitian 행렬:  $A = A^T$ , 고유치가 모두 실수

Skew-Hermitian 행렬

:  $A = -A^T$ , 고유치가 0이거나 순허수

Unitary 행렬:  $A^T = A^{-1}$ , 고유치의 절댓값이 1

10.  $A$ 가 고유벡터의 기저를 가질 때,  $X$ 를 고유벡터들을 열벡터로 하는 행렬이라 하면  $D = X^{-1}AX$ 는 대각행렬이 되며,  $A$ 의 고유치들이 주대각선의 원소가 된다. 이를 대각화라 한다.

$A$ 를 실대칭행렬이라 하면,  $A$ 는 고유벡터들로 구성된 정규직교 기저를 갖는다.  $A$ 의 대각화를 2차 형식에 대입한 후, 치환하고 정리하는 것을 주축에 대한 형식의 변환이라 한다.

11.  $D(\lambda) = (1.5 - \lambda)^2 - 0.50^2 = 0$ 이므로  $\lambda = 1, 2$ 이다.

$\lambda = 1$ 이면  $x_1 + x_2 = 0$ 이므로 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ 이다.  $\lambda = 2$ 이면  $-x_1 + x_2 = 0$ 이므로 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ 이다.

12.  $D(\lambda) = (-7 - \lambda)(7 - \lambda) + 48 = 0$ 이므로  $\lambda = \pm 1$ 이다.

$\lambda = 1$ 이면  $-2x_1 + x_2 = 0$ 이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ 이다.  $\lambda = -1$ 이면  $-3x_1 + 2x_2 = 0$ 이므로 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ 이다.

13.  $D(\lambda) = (8 - \lambda)(4 - \lambda) + \frac{15}{4} = 0$ 이므로  $\lambda = \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$ 이다.

$\lambda = \frac{13}{2}$ 이면  $3x_1 - 2x_2 = 0$ 이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ 이다.  $\lambda = \frac{11}{2}$ 이면  $5x_1 - 2x_2 = 0$ 이므로 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^T$ 이다.

14.  $D(\lambda) = -\lambda^3 + 22.5\lambda^2 - 162\lambda + 364.5 = 0$ 이므로

$$\lambda = \frac{9}{2}, 9 \text{ (중근)이다.}$$

$$\lambda = \frac{9}{2} \text{이면 } x_1 - 2x_3 = 0, x_2 + 2x_3 = 0 \text{ 이므로}$$

고유벡터는  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ 이다.  $\lambda = 9$ 이면

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \text{ 이므로}$$

고유벡터는  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$ 와  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ 이다.

15.  $D(\lambda) = -\lambda^3 - 144\lambda = 0$ 이므로  $\lambda = 0, \pm 12i$ 이다.

$$\lambda = 0 \text{이면 } x_1 - 2x_3 = 0, x_2 + 2x_3 = 0 \text{ 이므로}$$

고유벡터는  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ 이다.  $\lambda = 12i$ 이면

$$x_1 - 3ix_2 - 2x_3 = 0, -4x_2 + (1 + 3i)x_3 = 0 \text{ 이므로}$$



고유벡터는  $\begin{bmatrix} \frac{-1+3i}{4} & \frac{1+3i}{4} & 1 \end{bmatrix}^T$  이다.  $\lambda = -12i$

이면  $x_1 + 3ix_2 - 2x_3 = 0$ ,  $4x_2 + (-1+3i)x_3 = 0$  이므로

고유벡터는  $\begin{bmatrix} \frac{-1-3i}{4} & \frac{1-3i}{4} & 1 \end{bmatrix}^T$  이다.

16.  $\mathbf{A}$ 에서  $D(\lambda) = (-4-\lambda)^2 - 13^2 = 0$  이므로  
 $\lambda = 9, -17$  이다.

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 13 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -17 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

$\hat{\mathbf{A}}$ 에서  $D(\lambda) = (9-\lambda)(-17-\lambda) = 0$  이므로  
 $\lambda = 9, -17$  이다.

17.  $\mathbf{A}$ 에서  $D(\lambda) = (5-\lambda)(-3-\lambda) - 20 = 0$  이므로  
 $\lambda = 7, -5$  이다.

$$\mathbf{P}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -10 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{2} & -\frac{35}{2} \\ \frac{27}{2} & -\frac{31}{2} \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

$\hat{\mathbf{A}}$ 에서  $D(\lambda) = \left(\frac{35}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{31}{2} - \lambda\right) - \frac{46845}{4} = 0$  이므로  
 $\lambda = 7, -5$  이다.

18.  $\mathbf{A}$ 에서  $D(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$  이므로  
 $\lambda = 2, -1, -2$  이다.

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 31 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 31 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

$$= \begin{bmatrix} -35 & -259 & 345 \\ 3 & 23 & -27 \\ -1 & -7 & 11 \end{bmatrix}$$

$\hat{\mathbf{A}}$ 에서  $D(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$  이므로  
 $\lambda = 2, -1, -2$  이다.

19.  $D(\lambda) = (-0.85-\lambda)(1.2-\lambda) + 1 = 0$  이므로

$$\lambda = \frac{2}{5}, -\frac{1}{20} \text{ 이다. } \lambda = \frac{2}{5} \text{ 이면 } 5x_1 - 4x_2 = 0 \text{ 이므로}$$

고유벡터는  $\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda = -\frac{1}{20}$  이면

$4x_1 - 5x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}^T$  이다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.85 & 1.0 \\ -1.0 & 1.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & -0.05 \end{bmatrix}$$

이다.

20.  $D(\lambda) = (27-\lambda)(315-\lambda) - 289 = 0$  이므로

$\lambda = 316, 26$  이다.  $\lambda = 316$  이면  $17x_1 + x_2 = 0$  이므로

고유벡터는  $\begin{bmatrix} 1 & -17 \end{bmatrix}^T$  이고  $\lambda = 26$  이면

$x_1 - 17x_2 = 0$  이므로 고유벡터는  $\begin{bmatrix} 17 & 1 \end{bmatrix}^T$  이다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ -17 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{290} \begin{bmatrix} 1 & -17 \\ 17 & 1 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{290} \begin{bmatrix} 1 & -17 \\ 17 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 & -17 \\ -17 & 315 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ -17 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 316 & 0 \\ 0 & 26 \end{bmatrix}$$

이다.

21.  $D(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 432\lambda - 1760 = 0$  이므로  
 $\lambda = 4, 22, -20$  이다.

$\lambda = 4$  이면  $x_1 + x_3 = 0$ ,  $x_2 + x_3 = 0$  이므로

고유벡터는  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$  이고,  $\lambda = 22$  이면

$x_1 - x_2 = 0$ ,  $-2x_2 + x_3 = 0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$  이며,  $\lambda = -20$  이면

$x_1 - 2x_3 = 0$ ,  $x_2 + x_3 = 0$  이므로 고유벡터는

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$  이다.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 22 & 6 \\ 8 & 2 & 6 \\ -8 & 20 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

이다.

22.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 17 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (9-\lambda)(17-\lambda) - 9 = 0$  이므로  $\lambda = 18, 8$  이다.

따라서  $Q = 18y_1^2 + 8y_2^2 = 36$  이다.

23.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -14 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (4-\lambda)(-14-\lambda) - 144 = 0$  이므로  $\lambda = 10, -20$

이다. 따라서  $Q = 10y_1^2 - 20y_2^2 = 20$  이다.

24.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (6-\lambda)(-6-\lambda) - 64 = 0$  이므로  $\lambda = \pm 10$  이다.

따라서  $Q = 10y_1^2 - 10y_2^2 = 0$  이다.

25.  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.7 & 1.6 \\ 1.6 & 1.3 \end{bmatrix}$

$D(\lambda) = (3.7-\lambda)(1.3-\lambda) - 2.56 = 0$  이므로  $\lambda = 4.5, 0.5$

이다. 따라서  $Q = 4.5y_1^2 + 0.5y_2^2 = 4.5$  이다.





## CHAPTER 3

# 벡터미분. 기울기, 발산, 회전

### 3.1 Vectors in 2-Space and 3-Space

- $\mathbf{v} = [3, 2, 0]$ ,  $|\mathbf{v}| = \sqrt{13}$ ,  $\left[ \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, 0 \right]$
- $\mathbf{v} = [1, 1, -1]$ ,  $|\mathbf{v}| = \sqrt{3}$ ,  $\left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right]$
- $\mathbf{v} = [11, -4, 3]$ ,  $|\mathbf{v}| = \sqrt{146}$ ,  
 $\left[ \frac{11}{\sqrt{146}}, \frac{-4}{\sqrt{146}}, \frac{3}{\sqrt{146}} \right]$
- $\mathbf{v} = [-2, -8, -4]$ ,  $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{21}$ ,  
 $\left[ \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{-4}{\sqrt{21}}, \frac{-2}{\sqrt{21}} \right]$
- $\mathbf{v} = [3, \sqrt{7}, -3]$ ,  $|\mathbf{v}| = 5$ ,  $\left[ \frac{3}{5}, \frac{\sqrt{7}}{5}, \frac{-3}{5} \right]$
- $Q: (4, 2, 13)$ ,  $|\mathbf{v}| = 4$
- $Q: \left( \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{4} \right)$ ,  $|\mathbf{v}| = \frac{\sqrt{69}}{4}$
- $Q: (13.1, 0.8, -2.0)$ ,  $|\mathbf{v}| = \sqrt{176.25}$
- $Q: (0, 0, -4)$ ,  $|\mathbf{v}| = \sqrt{19}$
- $Q: (0, 0, 0)$ ,  $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$
- $4\mathbf{a} = [8, 12, 0]$ ,  $\frac{1}{4}\mathbf{a} = \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0 \right]$ ,  $-\mathbf{a} = [-2, -3, 0]$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = [6, -3, 0] + [-1, 5, 3] = [5, 2, 3]$   
 $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = [2, 3, 0] + [3, -1, 3] = [5, 2, 3]$
- $\mathbf{b} + \mathbf{c} = [3, -1, 3]$ ,  $\mathbf{c} + \mathbf{b} = [3, -1, 3]$
- $6\mathbf{c} - 3\mathbf{d} = [-6, 30, 18] - [0, 0, 6] = [-6, 30, 12]$   
 $3(2\mathbf{c} - \mathbf{d}) = 3([-2, 10, 6] - [0, 0, 2])$   
 $= 3[-2, 10, 4] = [-6, 30, 12]$
- $5(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 5[-5, 11, 3] = [-25, 55, 15]$   
 $5\mathbf{c} - 5\mathbf{b} = [-5, 25, 15] - [20, -30, 0] = [-25, 55, 15]$
- $3\mathbf{a} - 2\mathbf{c} = [6, 9, 0] - [-2, 10, 6] = [8, -1, -6]$   
 $6\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{c}\right) = 6\left(\left[1, \frac{3}{2}, 0\right] - \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 1\right]\right)$   
 $= 6\left[\frac{4}{3}, -\frac{1}{6}, -1\right] = [8, -1, -6]$
- $(5-2)\mathbf{a} = 3\mathbf{a} = [6, 9, 0]$   
 $5\mathbf{a} - 2\mathbf{a} = [10, 15, 0] - [4, 6, 0] = [6, 9, 0]$
- $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = [4, 6, 0] + [20, -30, 0] = [24, -24, 0]$   
 $-2\mathbf{a} - 5\mathbf{b} = [-4, -6, 0] + [-20, 30, 0] = [-24, 24, 0]$
- 문제 12번 : 식(4b) 결합법칙  
문제 13번 : 식(4a) 교환법칙  
문제 14번 : 식(6a) 분배법칙  
문제 15번 : 식(6a) 분배법칙  
문제 16번 : 식(6a) 분배법칙
- $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ ,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ ,  
 $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ ,  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]$  라 하자.  
(4a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3]$   
 $= [b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3] = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

$$\begin{aligned} (4b) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3] + [w_1, w_2, w_3] \\ &= [(u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, (u_3 + v_3) + w_3] \\ &= [u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), u_3 + (v_3 + w_3)] \\ &= [u_1, u_2, u_3] + [v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3] \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \end{aligned}$$

$$(4c) \quad \mathbf{a} + \mathbf{0} = [a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0] = [a_1, a_2, a_3] = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{a} = [0 + a_1, 0 + a_2, 0 + a_3] = [a_1, a_2, a_3] = \mathbf{a}$$

$$(4d) \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = [a_1, a_2, a_3] + [-a_1, -a_2, -a_3] = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} (6a) \quad c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= c[a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \\ &= [c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2), c(a_3 + b_3)] \\ &= [ca_1, ca_2, ca_3] + [cb_1, cb_2, cb_3] \\ &= c\mathbf{a} + c\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6b) \quad (c+k)\mathbf{a} &= [(c+k)a_1, (c+k)a_2, (c+k)a_3] \\ &= [ca_1, ca_2, ca_3] + [ka_1, ka_2, ka_3] \\ &= c\mathbf{a} + k\mathbf{a} \end{aligned}$$

$$(6c) \quad c(k\mathbf{a}) = c[ka_1, ka_2, ka_3] = [cka_1, cka_2, cka_3] = (ck)\mathbf{a}$$

$$(6d) \quad 1\mathbf{a} = [1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2, 1 \cdot a_3] = \mathbf{a}$$

$$21. \quad \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u} = [4, 9, -3], \quad |\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u}| = \sqrt{106}$$

$$22. \quad \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u} = [0, 0, 0], \quad |\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u}| = 0$$

$$23. \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = [0, 0, 5], \quad |\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u}| = 5$$

$$24. \quad \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u} = [1, 1, 0], \quad |\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u}| = \sqrt{2}$$

$$25. \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = [6, 2, -14], \quad |\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u}| = \sqrt{236}$$

$$26. \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] \text{ 라 하자.}$$

$$\text{문제 21번에서 } \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v} = [4 + v_1, 9 + v_2, -3 + v_3]$$

이고 평형조건으로부터

$$4 + v_1 = 0, 9 + v_2 = 0, -3 + v_3 = 0 \text{ 을 얻는다.}$$

$$\text{따라서 } \mathbf{v} = [-4, -9, 3] \text{ 이다.}$$

$$27. \quad \mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3] \text{ 라 하자.}$$

$$\text{문제 23번에서 } \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{p} = [p_1, p_2, 5 + p_3]$$

$$\text{이고 평형조건으로부터 } p_1 = 0, p_2 = 0, 5 + p_3 = 0 \text{ 을}$$

$$\text{얻는다. 따라서 } \mathbf{p} = [0, 0, -5] \text{ 이다.}$$

$$28. \quad \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]$$

$$29. \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] \text{ 라 하자.}$$

$$\text{문제 21번에서 } \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v} = [4 + v_1, 9 + v_2, -3 + v_3]$$

이고  $xy$ -평면에 평행하다는 조건으로부터

$$-3 + v_3 = 0 \text{ 을 얻는다. 따라서 } \mathbf{v} = [v_1, v_2, 3] \text{ 이다.}$$

$$30. \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] \text{ 라 하자.}$$

$$\text{문제 24번에서 } \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v} = [1 + v_1, 1 + v_2, v_3] \text{ 이고}$$

$x$ -방향과  $y$ -방향의 성분이 0이라는 조건으로부터

$$1 + v_1 = 0, 1 + v_2 = 0 \text{ 을 얻는다.}$$

$$\text{따라서 } \mathbf{v} = [-1, -1, v_3] \text{ 이다.}$$

$$31. \quad \text{세 벡터의 합은 } [3, 5, -10 + k] \text{ 이다. } xy \text{ 평면과}$$

$$32. \quad 2 \leq |\mathbf{p} + \mathbf{q}| \leq 10$$

방향에 대한 정보는 전혀 없다.

33.  $|p+q+u| \leq 18$

방향에 대한 정보는 전혀 없다.

34.  $v_A = \left[-\frac{550}{\sqrt{2}}, -\frac{550}{\sqrt{2}}\right], v_B = \left[-\frac{450}{\sqrt{2}}, \frac{450}{\sqrt{2}}\right]$  이므로

$$v = v_B - v_A = \left[\frac{100}{\sqrt{2}}, \frac{1000}{\sqrt{2}}\right] \text{ 이다.}$$

35.  $v_A = \left[\frac{22}{\sqrt{2}}, \frac{22}{\sqrt{2}}\right], v_B = [-19, 0]$  이므로

$$v = v_B - v_A = \left[-19 - \frac{22}{\sqrt{2}}, -\frac{22}{\sqrt{2}}\right] \text{ 이다.}$$

36. 두 개의 거울이 각각  $x$  축과  $y$  축에 수직으로 놓여 있다고 가정하자. 입사광선의 성분이  $u = [u_1, u_2]$  라면 첫 번째 반사광선( $x$  축에 놓인 거울에 반사된 광선)은  $[u_1, -u_2]$  이고 두 번째 반사광선( $y$  축에 놓인 거울에 반사된 광선)은  $[-u_1, -u_2] = -u$  이다. 따라서 수직으로 놓인 두 개의 거울에 반사된 반사광선은 입사광선과 평행하며 방향은 반대이다.

37.  $u = [-u, 0], v = [v, v]$  라 하자.

$$p = [0, -1000] \text{ 이므로 } u+v+p = [-u+v, v-1000]$$

이다. 이 세 벡터가 평형을 이루므로  $-u+v=0$ ,

$v-1000=0$ 이다. 따라서  $u=1000, v=1000$ 이다.

38. (a) 두 대각선을 나타내는 벡터는  $a+b, a-b$ 이다.

교점  $P$ 를 나타내는 위치벡터는 두 가지

방법으로 표현된다. 즉,  $\lambda(a+b) = b + \mu(a-b)$  이다.

$a$ 와  $b$ 가 일차독립이므로  $\lambda = \mu, \lambda = 1 - \mu$  이다.

따라서  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$  이고 평행사변형의 대각선들은 서로 이등분한다.

(b) 이웃한 두변의 중점을 연결한 선분과 대각선의 교점을  $Q$ 라 하자. (a)와 마찬가지로  $Q$ 를 나타내는 위치벡터는 두 가지 방법으로 표현된다.

$$\lambda(a+b) = \frac{1}{2}b + \mu(a-b) \text{ 이다. } \lambda = \mu, \lambda = \frac{1}{2} - \mu$$

이므로  $\lambda = \mu = \frac{1}{4}$  이다. 따라서 대각선이

내분되는 비율은  $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 1:3$ 이다.

(c) 마주보는 대변의 중점을 연결하면 합동인 네 개의 평행사변형이 생긴다. 작은 평행사변형에 대하여 (a)를 적용하면, 1:1의 비율로 내분된다. 따라서 이를 큰 평행사변형에 대하여 적용하면 1:1+2의 비율로 내분된다.

(d) 두 개의 중선의 교점을  $P$ 라 하자. 교점  $P$ 의 위치벡터를 표현하는 두 가지 방법에 의하여

$$\lambda\left(a - \frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{2}b + \mu\left(\frac{1}{2}a - b\right) \text{ 이다. } \lambda = \frac{1}{2}\mu,$$

$$-\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2} - \mu \text{ 이므로 } \lambda = \frac{1}{3}, \mu = \frac{2}{3} \text{ 이다. 따라서}$$

중선은  $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2:1$ 의 비율로 내분된다.

중선을 긋지 않은 꼭지점과  $P$ 를 지나는 직선이

마주보는 변과 만나는 점을  $Q$ 라 하자.  $Q$ 의 위치벡터를 표현하는 두 가지 방법에 의하여

$$b + \lambda(a-b) = \mu\left[b + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a - b\right)\right] \text{ 이다. } \lambda = \frac{1}{3}\mu,$$

$$1 - \lambda = \frac{1}{3}\mu \text{ 이므로 } \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{3}{2} \text{ 이다. 따라서}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } Q \text{는 중점이고 } \mu = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

중선은  $P$ 에 의하여 2:1로 내분된다.

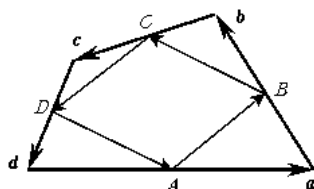
(e) 그림에 의하여  $a+b+c+d=0, c+d=-(a+b)$  이다.

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(a+b) \text{ 이고 } \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(c+d) = -\frac{1}{2}(a+b)$$

이므로 두 벡터의 크기는 같고 방향이 반대이다.

따라서 변  $AB$ 와  $CD$ 는 평행하고 길이가

같으므로 사각형  $ABCD$ 는 평행사변형이다.



(f) 그림에서 사각형  $AFGD$ 와  $BCHE$ 는

평행사변형이므로 대각선  $AG$ 와  $DF, BH$ 와

$EC$ 는 서로 이등분한다. 그림과 같이

평행육면체의 모서리를 나타내는 벡터를  $a, b, c$ 라 하자.

$$\text{대각선 } AG \text{ 중점의 위치벡터는 } \frac{1}{2}(a+b+c),$$

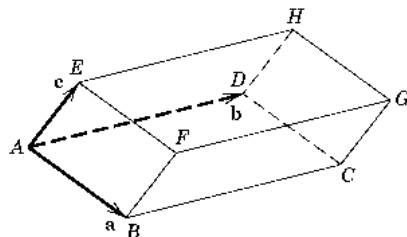
$$\text{대각선 } BH \text{ 중점의 위치벡터는 } a + \frac{1}{2}(b+c-a),$$

$$\text{대각선 } EC \text{ 중점의 위치벡터는 } c + \frac{1}{2}(a+b-c),$$

$$\text{대각선 } DF \text{ 중점의 위치벡터는 } b + \frac{1}{2}(a+c-b)$$

으로 모두 같은 위치벡터를 갖는다.

따라서 대각선들은 서로 이등분한다.



(g)  $v_1, v_2, \dots, v_n$ 을 정  $n$ 각형의 중심에서 각

꼭지점으로 그은 벡터라 하자. 이 벡터들 사이의

각은  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  이고 정  $n$ 각형의 한 내각의 크기는

$$\beta = \pi - \frac{2\pi}{n} \text{ 이다.}$$

$\mathbf{v}_1$  을 시작으로 다음과 같이 벡터들을 이동한다.

$\mathbf{v}_1$  의 종점에  $\mathbf{v}_2$  의 시점을,

$\mathbf{v}_2$  의 종점에  $\mathbf{v}_3$  의 시점을,

...

$\mathbf{v}_{n-1}$  의 종점에  $\mathbf{v}_n$  의 시점을 붙인다.

그러면 두 벡터 사이의 각은  $\pi - \alpha = \beta$  이므로

새로 만들어지는 도형도 정  $n$  각형이 된다.

따라서  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$  이다.

### 3.2 Inner Product(Dot Product)

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6, \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 6, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 16$
- $(-4\mathbf{a} + 3\mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = [10, -21, 1] \cdot [2, 0, 4] = 24$   
 $12(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = 12[-3, 6, -1] \cdot [2, 0, 4] = -120$
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{14}, |\mathbf{b}| = 4\sqrt{5}, |\mathbf{c}| = \sqrt{22}$
- $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |[1, 3, 6]| = \sqrt{46}$   
 $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = \sqrt{14} + 2\sqrt{5}$
- $|\mathbf{b} + \mathbf{c}| = |[4, -3, 7]| = \sqrt{74}$   
 $|\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| = 2\sqrt{5} + \sqrt{22}$
- $|\mathbf{a} + \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{c}|^2 - 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{c}|^2)$   
 $= |[1, 0, 5]|^2 + |[-3, 6, -1]|^2 - 2(14 + 22)$   
 $= 26 + 46 - 72 = 0$
- $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}| = |-5| = 5, |\mathbf{a}||\mathbf{c}| = \sqrt{14} \sqrt{22} = 2\sqrt{77}$
- $4\mathbf{a} \cdot 7\mathbf{b} = [-4, 12, 8] \cdot [14, 0, 28] = 168$   
 $28\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [-28, 84, 56] \cdot [2, 0, 4] = 168$
- $12\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 12\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = [-12, 36, 24] \cdot \mathbf{b} + [-12, 36, 24] \cdot \mathbf{c}$   
 $= 72 - 60 = 12$   
 $12\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = [-12, 36, 24] \cdot [4, -3, 7] = 12$
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = [-1, 3, 2] \cdot [0, 3, 1] = 11$   
 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = [-3, 3, -2] \cdot [2, -3, 3] = -21$
- 문제 1번 : 식 (5b) 교환법칙  
 문제 4번 : 식 (7) 삼각부등식  
 문제 5번 : 식 (7) 삼각부등식  
 문제 6번 : 식 (8) 평행사변형 법칙  
 문제 7번 : 식 (6) Cauchy-Schwarz 부등식
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$  이면  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0$  이다.  
 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  이면  $\mathbf{v}$  와  $\mathbf{w}$  는 임의의 벡터이다.  
 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  이면  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  가  $\mathbf{u}$  에 수직임을 의미한다.
- 식 (1)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma$  와  $|\cos\gamma| \leq 1$  에 의하여  
 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$  이다.
- Cauchy-Schwarz 부등식 :  
 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = 6, |\mathbf{a}||\mathbf{b}| = 2\sqrt{70} = 116.73$  이므로  
 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$  이다.  
 삼각부등식 :  
 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{46} = 6.78, |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = \sqrt{14} + 2\sqrt{5} = 8.21$  이므로  
 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$  이다.
- $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2,$   
 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$   
 이므로  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2)$  이다.
- $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$   
 $\leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$   
 이므로  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$  이다.
- $\mathbf{d} = [1, 3, 3], w = 5 + 9 = 14$
- $\mathbf{d} = [6, 7, 5], w = -6 - 14 + 20 = 0$

- $\mathbf{d} = [-3, -2, 1], w = -8 + 3 = -5$
- $\mathbf{d} = [2, -1, -1], w = 12 + 3 + 3 = 18$
- 두 힘의 합력이 한 일은 각각 힘이 한 일의 합과 같다.  
 두 힘을 각각  $\mathbf{p}$  와  $\mathbf{q}$  라 하고, 일이 행해진 방향을  $\mathbf{d}$  라 하자. 이때 행해진 일은  $w = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{d}$  이다.  
 분배법칙에 의하여  $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{d}$  이므로  
 $w = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{d}$  이다.
- $\cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{28}}, \gamma = 19.107^\circ$
- $\cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}, \gamma = 53.301^\circ$
- $\mathbf{a} + \mathbf{c} = [2, 1, 2], \mathbf{b} + \mathbf{c} = [4, 2, 3]$  이므로  
 $\cos\gamma = \frac{16}{3\sqrt{29}}, \gamma = 86.451^\circ$  이다.
- $\mathbf{a} + \mathbf{c} = [1 + n, 1, 2n], \mathbf{b} + \mathbf{c} = [3 + n, 2, 1 + 2n]$  이므로  
 $\cos\gamma = \frac{5n^2 + 6n + 5}{\sqrt{5n^2 + 2n + 1}\sqrt{5n^2 + 10n + 14}}$  이다.  
 $n$  이 충분히 크면  $\cos\gamma \approx 1$  이다. 따라서  $\gamma \neq 0^\circ$  이다.
- $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$   
 $= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma + |\mathbf{b}|^2$
- $\beta - \alpha$  는 두 벡터  $\mathbf{a}$  와  $\mathbf{b}$  사이의 각의 크기이다.  
 $|\mathbf{a}| = 1$  이고  $|\mathbf{b}| = 1$  이므로  
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta - \alpha)$  이다.  
 두 벡터  $\mathbf{a}$  와  $\mathbf{b}$  의 성분이 각각  
 $\mathbf{a} = [\cos\alpha, \sin\alpha], \mathbf{b} = [\cos\beta, \sin\beta]$  이므로  
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$  이다.  
 따라서  $\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$  이다.
- $\overrightarrow{AB} = [3, 0, 0], \overrightarrow{AC} = [1, 1, -1]$  이므로  
 $\cos A = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, A = 54.736^\circ$  이다.  
 $\overrightarrow{BA} = [-3, 0, 0], \overrightarrow{BC} = [-2, 1, -1]$  이므로  
 $\cos B = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, B = 35.264^\circ$  이다.  
 $\overrightarrow{CA} = [-1, -1, 1], \overrightarrow{CB} = [2, -1, 1]$  이므로  
 $\cos C = \frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = 0, C = 90^\circ$  이다.
- 주어진 평행사변형의 모서리는  $[6, 0]$  과  $[2, 3]$  으로 이루어져 있다.  
 $\cos\gamma = \frac{12}{6\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \gamma = 56.310^\circ$  이므로  
 다른 각은  $123.690^\circ$  이다.

30. Hesse의 방정식에 의하여

$$\mathbf{a} = [3, 1, 1], |\mathbf{a}| = \sqrt{11} \text{ 이다.}$$

(1, 0, 2)으로부터 평면 위 임의의 점  $(x, y, z)$ 까지의

벡터는  $[1-x, -y, 2-z]$ 이고  $3x+y+z=9$ 이므로

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 3(1-x) - 2y + (2-z) = 5 - (x+2y+z) = -4$$

이다. 따라서  $c=4$ 이므로 평면까지의 거리는

$$\frac{4}{\sqrt{11}} \text{ 이다.}$$

31.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3a_1 + 28 = 0$ 이므로  $a_1 = -\frac{28}{3}$ 이다.

32. 평면  $3x+z=5$ 의 법선벡터 :  $[3, 0, 1]$

평면  $8x-y+cz=9$ 의 법선벡터 :  $[8, -1, c]$

두 평면이 수직이므로

$$[3, 0, 1] \cdot [8, -1, c] = 24 + c = 0 \text{ 이다.}$$

따라서  $c = -24$ 이다.

33.  $\mathbf{a} \cdot [3, 4] = 3a_1 + 4a_2 = 0$ 이고  $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$

이므로  $a_1 = \pm \frac{4}{5}, a_2 = \mp \frac{3}{5}$ 이다.

따라서  $\mathbf{a} = \left[\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right], \left[-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right]$ 이다.

34. 세 개의 거울이 각각  $xy$  평면,  $yz$  평면,  $zx$  평면에

수직으로 놓여 있다고 가정하자. 입사광선의

성분이  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ 라 하면 차례로 거울에

반사되는 반사광선의 성분은  $[u_1, u_2, -u_3],$

$[-u_1, u_2, -u_3], [-u_1, -u_2, -u_3]$ 이다.

따라서 입사광선과 반사광선의 사이각은  $180^\circ$ 이다.

35. 평행사변형의 두 변을 나타내는 벡터를  $\mathbf{a}$ 와

$\mathbf{b}$ 라 하면 두 대각선은  $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 와  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 로 나타낸다.

두 대각선이 수직이므로

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0 \text{ 이다.}$$

따라서  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ 이어야 두 대각선이 수직이다.

$$\ast \text{ 36번-38번 } |\mathbf{a}| \cos \gamma = |\mathbf{a}| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

$$36. \frac{6}{\sqrt{14}}$$

$$37. \frac{0}{\sqrt{29}} = 0$$

$$38. \frac{-34}{\sqrt{17}} = -2\sqrt{17}$$

39.  $\mathbf{a}$ 의  $\mathbf{b}$ 방향의 성분과  $\mathbf{b}$ 의  $\mathbf{a}$ 방향의 성분이 같기

위하여  $|\mathbf{a}| \cos \gamma = |\mathbf{b}| \cos \gamma$ 를 만족하여야 한다.

따라서  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ 이거나  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 가 직교할 때이다.

40.  $\mathbf{b}$ 를  $k\mathbf{b}$ 로 변경하여 위의 공식에 대입하면

$$|\mathbf{a}| \cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot k\mathbf{b}}{|k\mathbf{b}|} = \frac{k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{k|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \text{ 이므로 성분은}$$

변함이 없다.

### 3.3 Vector Product(Cross Product)

1.  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3], \mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3], \mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$ 라 하자.

$$\text{식 (4) } (l\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ la_1 & la_2 & la_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = l \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = l(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (l\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ lb_1 & lb_2 & lb_3 \end{vmatrix} = l \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = l(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\text{식 (5) } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

2.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ 이므로  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{0}$ 이다.

따라서  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ 는 수직이다.

$$3. \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \left( \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{c} \\ = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 \\ = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

4.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [8, -4, -4]$ 이므로  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{96}$ 이다.

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = 29 \times 5 - 7^2 = 96 \text{ 이다.}$$

따라서  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$ 이다.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \gamma = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \gamma) \\ = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \gamma = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

이므로  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$ 이다.

5. 힘  $\mathbf{p}$ 가  $-\mathbf{p}$ 로 바뀌면 모멘트의 방향도 바뀐다.

즉,  $\mathbf{m}$ 이  $-\mathbf{m}$ 으로 바뀌므로 반대방향으로

회전한다.

6. 회전축으로부터 거리가  $2d$ 로 2배가 되면

속력이 2배가 된다.

7.  $w = [0, 20, 0]$ ,  $r = [8, 6, 0]$ ,

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 20 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, -160], |v| = 160$$

8.  $w = [x, x, 0]$ ,  $|w| = 10$  이므로  $x = \frac{10}{\sqrt{2}}$  이다. 따라서

$$w = \left[ \frac{10}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{2}}, 0 \right], r = [4, 2, -2]$$

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{10}{\sqrt{2}} & \frac{10}{\sqrt{2}} & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = [-10\sqrt{2}, 10\sqrt{2}, -10\sqrt{2}],$$

$$|v| = 10\sqrt{6} \text{ 이다.}$$

9.  $|(abc)|$ 은 세 벡터  $a, b, c$ 를 각각 한 변으로 하는 평행육면체의 부피를 의미한다. 즉,  $(abc) = 0$ 이면 평행육면체의 부피가 0임을 의미한다.

11.  $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, -1],$

$$b \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 1], \quad a \cdot b = -8$$

12.  $3c \times 2d = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -12 & -3 \\ 6 & -2 & 10 \end{vmatrix} = [128, -78, 60],$

$$6c \times d = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 18 & -6 & 30 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = [126, 78, -60],$$

$$6d \cdot c = [12, -24, -6] \cdot [3, -1, 5] = 30,$$

$$6c \cdot d = [18, -6, 30] \cdot [2, -4, -1] = 30$$

13.  $c \times (a+b) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [1, 1, -2],$

$$a \times c + b \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = [2, 1, 0] + [-3, -2, 2] = [-1, -1, 2]$$

14.  $4b \times 3c + 12c \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & 12 & 0 \\ 6 & -12 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 24 & -48 & -12 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [-36, -24, 20] + [36, 24, -20] = [0, 0, 0]$

15.  $(a+d) \times (d+a) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = [0, 0, 0]$

16.  $(b \times c) \cdot d = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} \cdot [3, -1, 5] = [-3, -2, 2] \cdot [3, -1, 5] = 3,$

$$b \cdot (c \times d) = [-2, 3, 0] \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = [-2, 3, 0] \cdot [-21, -13, 10] = 3$$

17.  $(b \times c) \times d = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = [-8, 21, 9],$

$$b \times (c \times d) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 0 \\ -21 & -13 & 10 \end{vmatrix} = [30, 20, 89]$$

18.  $(a \times b) \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = [-2, -1, 0],$

$$a \times (b \times a) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [-2, -1, 0]$$

19.  $(jki) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad (jki) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$

20.  $(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -1 \\ -21 & -13 & 10 \end{vmatrix} = [-13, 21, 0],$

$$(abd)c - (abc)d = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} c - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix} d = -5c - d = [-10, 20, 5] - [3, -1, 5] = [-13, 21, 0]$$

21.  $2b \times 4c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 6 & 0 \\ 8 & -16 & -4 \end{vmatrix} = [-24, -16, 16],$

$$8b \times d = 8\sqrt{9+4+4} = 8\sqrt{17},$$

$$8c \times b = 8\sqrt{9+4+4} = 8\sqrt{17}$$

22.  $(a-b) \cdot (c-b) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 4 & -7 & -1 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 8,$

$$(a \cdot c) d = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

23.  $b \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 0],$

$$(b-c) \times (c-b) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 7 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \end{vmatrix} = [0, 0, 0], \quad b \cdot b = 13$$

24. (13)  $b \times (c \times d) = b \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_1 & c_2 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b \times [0, 0, -c_2 d_1] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -c_2 d_1 \end{vmatrix} = [-b_2 c_2 d_1, b_1 c_2 d_1, 0]$

$$(b \cdot d)c - (b \cdot c)d = (b_1 d_1)c - (b_1 c_1 + b_2 c_2)d = [b_1 c_1 d_1, b_1 c_2 d_1, 0] - [b_1 c_1 d_1 + b_2 c_2 d_1, 0, 0] = [-b_2 c_2 d_1, b_1 c_2 d_1, 0]$$

(14)  $(a \times b) \times (c \times d) = \{(a \times b) \cdot d\}c - \{(a \times b) \cdot c\}d = (a \cdot b \cdot d)c - (a \cdot b \cdot c)d$

(15)  $(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot b)(c \cdot d) = a \cdot (b \times (c \times d)) = a \cdot [(b \cdot d)c - (b \cdot c)d] = (b \cdot d)(a \cdot c) - (b \cdot c)(a \cdot d)$

(16)  $(a \cdot b \cdot c) = a \cdot (b \times c) = (b \times c) \cdot a = (b \cdot c \cdot a)$

$$(a \cdot b \cdot c) = (a \times b) \cdot c = c \cdot (a \times b) = (c \cdot a \cdot b)$$

$$(a \cdot b \cdot c) = (a \times b) \cdot c = -(b \times a) \cdot c = -c \cdot (b \times a) = -(c \cdot b \cdot a)$$

$$(a \cdot b \cdot c) = a \cdot (b \times c) = -a \cdot (c \times b) = -(a \cdot c \cdot b)$$

25.  $r = [-2, 2, 0]$  이므로  $\cos \gamma = \frac{2}{2\sqrt{2}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$  이다.

$$m = 2\sqrt{2}\sqrt{13} \frac{5}{\sqrt{26}} = 10 \text{ 이고}$$



$$\mathbf{m} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, -10] \text{ 이다.}$$

26.  $\mathbf{r} = [2, 3, 2]$  이므로  $\cos \gamma = \frac{8}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{170}}$  이다.

$$m = \sqrt{17} \sqrt{10} \frac{\sqrt{106}}{\sqrt{170}} = \sqrt{106} \text{ 이고}$$

$$\mathbf{m} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = [9, -4, -3] \text{ 이다.}$$

27. 평행사변형의 모서리를 구성하는 벡터는  $[6, 2, 0]$  과  $[1, 2, 0]$  이다.

$$[6, 2, 0] \times [1, 2, 0] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 10] \text{ 이므로}$$

평행사변형의 넓이는  $|[0, 0, 10]| = 10$  이다.

28. 사각형  $P$ 의 각 모서리의 중점은

$$\left(\frac{7}{2}, 0, 0\right), \left(\frac{13}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(6, \frac{5}{2}, 0\right), (3, 2, 0) \text{ 이다.}$$

따라서 사각형  $Q$ 의 모서리를 나타내는 벡터는

$$\left[3, \frac{1}{2}, 0\right], \left[-\frac{1}{2}, 2, 0\right], \left[-3, -\frac{1}{2}, 0\right], \left[\frac{1}{2}, -2, 0\right]$$

이다. 마주보는 변을 나타내는 두 벡터씩  
평행하므로 사각형  $Q$ 는 평행사변형이다.

$$\left[3, \frac{1}{2}, 0\right] \times \left[-\frac{1}{2}, 2, 0\right] = \left[0, 0, \frac{25}{4}\right] \text{ 이므로}$$

넓이는  $\frac{25}{4}$  이다.

29. 삼각형의 두 변을 나타내는 벡터는

$$[2, 0, 4], [2, 3, 3] \text{ 이다.}$$

$$[2, 0, 4] \times [2, 3, 3] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = [-12, 2, 6]$$

이므로 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} |[-12, 2, 6]| = \frac{\sqrt{184}}{2} = \sqrt{46} \text{ 이다.}$$

30.  $A: \left(1, 2, \frac{1}{4}\right)$ ,  $B: (4, 2, -2)$ ,  $C: (0, 8, 4)$  이라 하자.

$$\overrightarrow{AB} = \left[3, 0, -\frac{9}{4}\right], \overrightarrow{AC} = \left[-1, 6, \frac{15}{4}\right] \text{ 이므로}$$

$$\text{법선벡터는 } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left[\frac{27}{2}, -9, 18\right] \text{ 이다. 따라서}$$

$$\text{평면의 방정식은 } \frac{27}{2}x - 9y + 18z = 0,$$

$$27x - 18y + 36z = 0 \text{ 이다.}$$

31.  $A: (1, 3, 4)$ ,  $B: (1, -2, 6)$ ,  $C: (4, 0, 7)$  이라 하자.

$$\overrightarrow{AB} = [0, -5, 2], \overrightarrow{AC} = [3, -3, 3] \text{ 이므로}$$

$$\text{법선벡터는 } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-9, 6, 15] \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 평면의 방정식은 } -9x + 6y + 15z = 69 \text{ 이다.}$$

32.  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -10$  이므로 평행육면체의

부피는 10이다.

33. 사면체의 모서리를 나타내는 벡터는  $[4, -8, 2]$ ,

$$[6, 3, 7], [9, 6, 3] \text{ 이다. } \begin{vmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 6 & 3 & 7 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -474 \text{ 이므로}$$

$$\text{사면체의 부피는 } \frac{474}{6} = 79 \text{ 이다.}$$

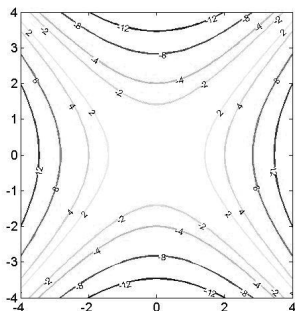
34. 사면체의 모서리를 나타내는 벡터는  $[2, 4, 6]$ ,

$$[7, 5, 3], [1, -1, 2] \text{ 이다. } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -90 \text{ 이므로}$$

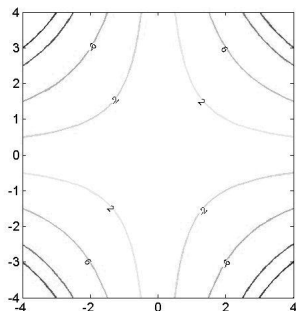
$$\text{사면체의 부피는 } \frac{90}{6} = 15 \text{ 이다.}$$

### 3.4 Vector and Scalar Functions and Their Fields. Vector Calculus : Derivatives

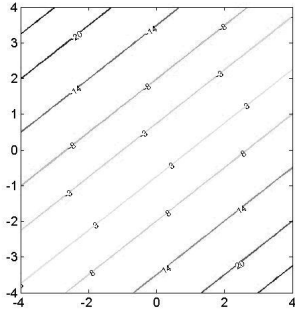
1.



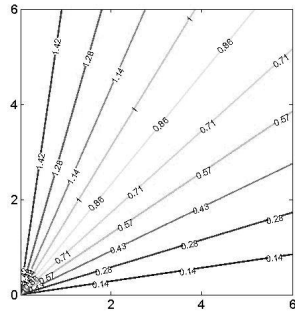
2.



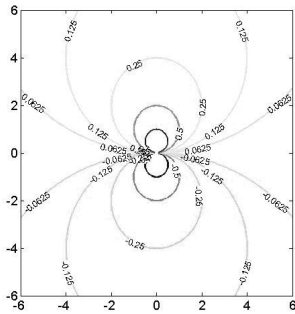
3.



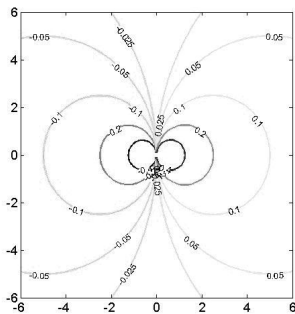
4.



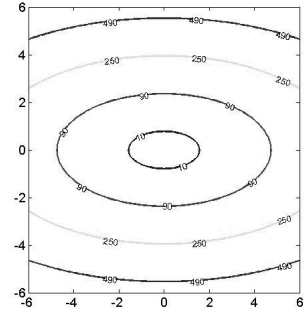
5.



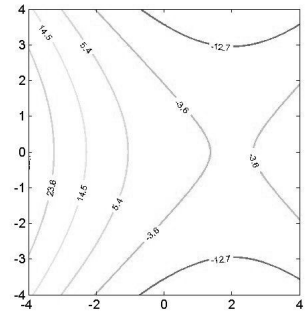
6.



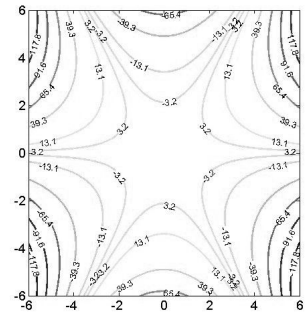
7.



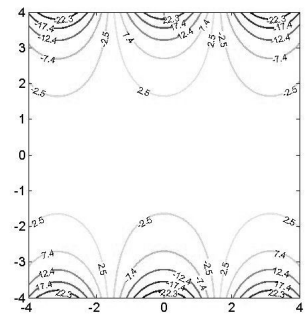
8. (a)



(b)

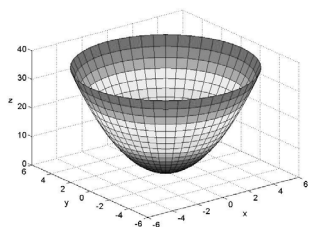


(c)

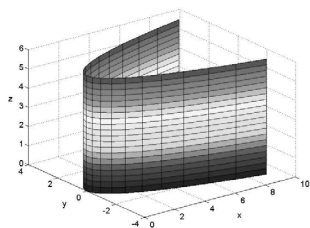




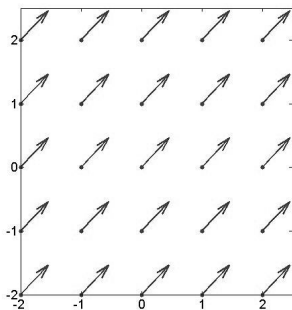
13. 포물면



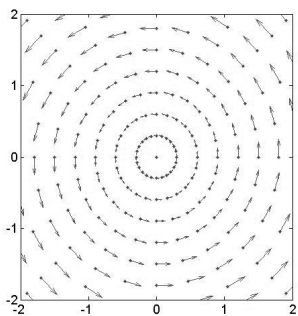
14. 포물선 기둥



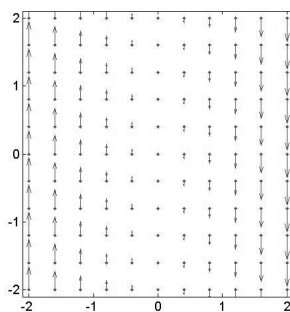
15.



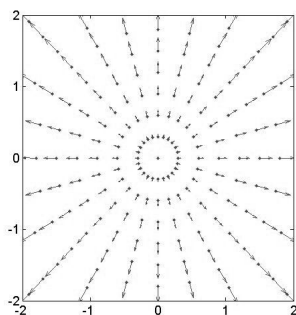
16.



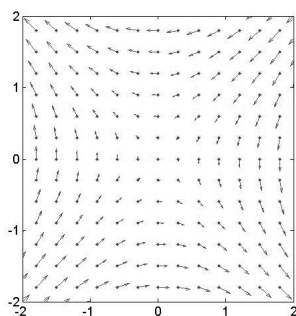
17.



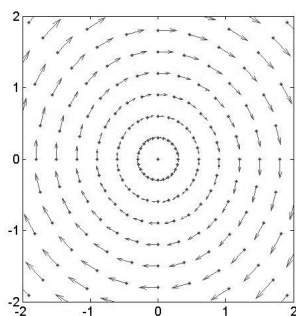
18.



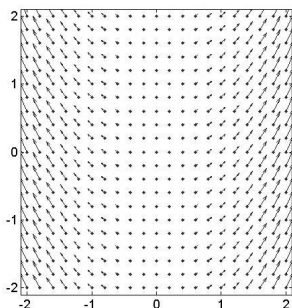
19.



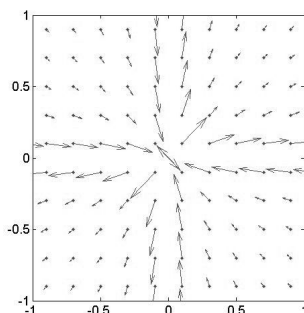
20.



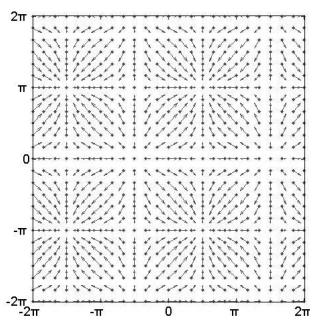
21. (a)



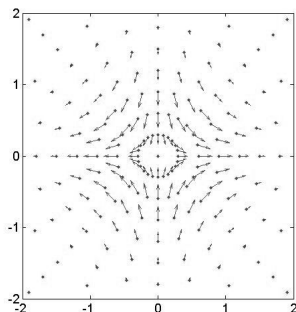
(b)



(c)



(d)



22. 1계 도함수 :  $[-6\sin 2t, 6\cos 2t, 4]$

2계 도함수 :  $[-12\cos 2t, -12\sin 2t, 0]$

23.  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3], \mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  라 하자.

$$\begin{aligned} (11) \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})' &= (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)' \\ &= u_1' v_1 + u_1 v_1' + u_2' v_2 + u_2 v_2' + u_3' v_3 + u_3 v_3' \\ &= (u_1' v_1 + u_2' v_2 + u_3' v_3) + (u_1 v_1' + u_2 v_2' + u_3 v_3') \\ &= \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12) \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})' &= [u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1]' \\ &= [u_2' v_3 - u_3' v_2, -u_1' v_3 + u_3' v_1, u_1' v_2 - u_2' v_1] \\ &\quad + [u_2 v_3' - u_3 v_2', -u_1 v_3' + u_3 v_1', u_1 v_2' - u_2 v_1'] \\ &= \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (13) \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w})' &= (\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}))' \\ &= \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})' \\ &= \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}' \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}') \\ &= (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \times \mathbf{w}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}') \end{aligned}$$

$$24. \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x} = [e^x \cos y, e^x \sin y], \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial y} = [-e^x \sin y, e^x \cos y]$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x} = [-\sin x \cosh y, -\cos x \sinh y],$$

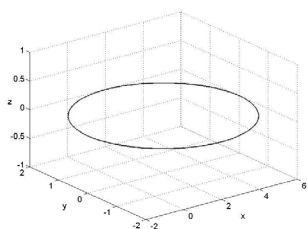
$$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial y} = [\cos x \sinh y, -\sin x \cosh y],$$

### 3.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion

1.  $x = 2 + 4\cos t, y = 2\sin t, z = 0$  이라 하면

$$\left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \text{ 이다.}$$

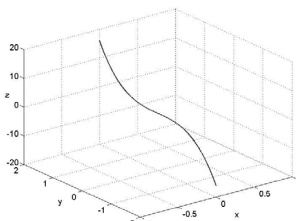
따라서 타원기둥  $\left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$  과 평면  $z = 0$  이 만나는 타원이다.



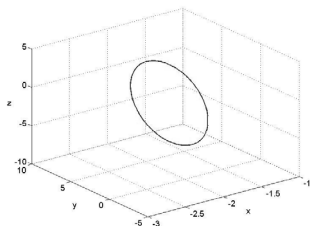
2.  $x = a + t, y = b + 3t, z = c - 5t$  라 하면

방향벡터가  $[1, 3, -5]$  이고 점  $(a, b, c)$  를 지나는 직선이다.

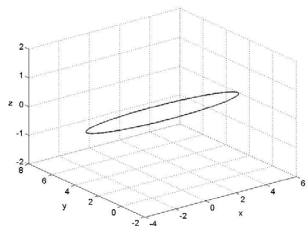
3.  $x = 0, y = t, z = 2t^3$  이므로  $yz$ -평면 위에 놓인 방정식  $z = 2y^3$  을 만족하는 곡선이다.



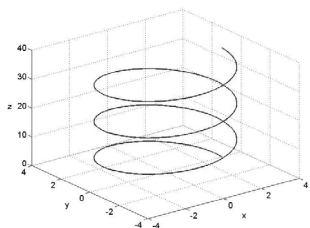
4.  $x = -2$ ,  $y = 2 + 5\cos t$ ,  $z = -1 + 5\sin t$  이므로  
 $(y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$ 이다.  
 따라서 원기둥  $(y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$ 과 평면  $z = -2$   
 와 만나는 원이다.



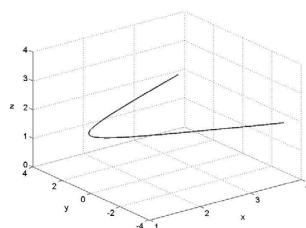
5.  $x = 1 + 5\cos t$ ,  $y = 3 + \sin t$ ,  $z = 0$ 이므로  
 $\left(\frac{x-1}{5}\right)^2 + (y-3)^2 = 1$ 이다.  
 따라서 타원기둥  $\left(\frac{x-1}{5}\right)^2 + (y-3)^2 = 1$ 과 평면  
 $z = 0$ 이 만나는 타원이다.



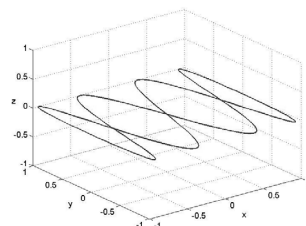
6.  $x = a + 3\cos\pi t$ ,  $y = b - 2\sin\pi t$ ,  $z = 0$ 이므로  
 $\left(\frac{x-a}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{2}\right)^2 = 1$ 이다.  
 따라서 타원기둥  $\left(\frac{x-a}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{2}\right)^2 = 1$ 과 평면  
 $z = 0$ 이 만나는 타원이다.  
 7.  $x = 3\cos t$ ,  $y = 3\sin t$ ,  $z = 2t$ 이므로  
 $\frac{y}{x} = \frac{3\sin t}{3\cos t} = \tan t$ 이다.  
 나선(Helix)  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $z = \frac{1}{2} \arctan \frac{y}{x}$ 이다.



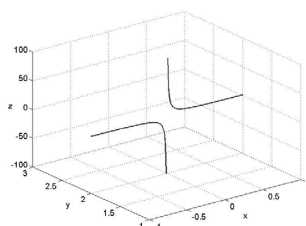
8.  $x = \cos ht$ ,  $y = \sin ht$ ,  $z = 2$ 이므로  
 $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 2$ ,  $x > 0$ 이다. 따라서 쌍곡선의 일부  
 이다.



9.  $x = \cos t$ ,  $y = \sin 4t$ ,  $z = 0$ 이므로



10.  $x = t$ ,  $y = 2$ ,  $z = 1/t$ 이므로  $xz = 1$ ,  $y = 2$ 이다.  
 따라서 쌍곡선이다.



11.  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 이므로  
 $x = 1 + \sqrt{2} \cos t$ ,  $y = -1 + \sqrt{2} \sin t$ ,  $z = 2$ 이다.  
 따라서  $[1 + \sqrt{2} \cos t, -1 + \sqrt{2} \sin t, 2]$ 이다.  
 12.  $(y-4)^2 + z^2 = 25$ 이므로  
 $x = 0$ ,  $y = 4 + 5\cos t$ ,  $z = 5\sin t$ 이다.  
 따라서  $[0, 4 + 5\cos t, 5\sin t]$ 이다.  
 13.  $x = t + 3$ ,  $y = 1$ ,  $z = 4t + 2$ 이므로  
 $[t + 3, 1, 4t + 2]$ 이다.  
 14. 방향벡터가  $[3, -1, 1]$ 이므로  
 $x = 3t + 1$ ,  $y = -t + 1$ ,  $z = t + 1$ 이다.  
 따라서  $[3t + 1, -t + 1, t + 1]$ 이다.  
 15.  $[t, 2t - 1, 3t]$ 이다.  
 16.  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = y$ 이므로  
 $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = \sin t$ 이다.  
 따라서  $[\cos t, \sin t, \sin t]$ 이다.  
 17.  $x = \sqrt{3} \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = \sin t$ 이므로  
 $[\sqrt{3} \cos t, \sin t, \sin t]$ 이다.

18.  $x = 5\cos t$ ,  $y = 5\sin t$ ,  $z = 2t$  이므로

$[5\cos t, 5\sin t, 2t]$  이다.

19.  $x = \cosh t$ ,  $y = \sinh t$ ,  $z = -2$  이므로

$[\cosh t, \sinh t, -2]$  이다.

20. 교선의 방향벡터는

$[2, -1, 3] \times [1, 2, -1] = [-5, 5, 5]$  이다.

$z = 0$  일 때  $2x - y = 2$ ,  $x + 2y = 3$  이므로 교점은

$\left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$  이다. 따라서  $\left[\frac{7}{5} - 5t, \frac{4}{5} + 5t, 5t\right]$  이다.

21. cosine함수는 우함수로  $t = -t^*$ 로 치환하여도

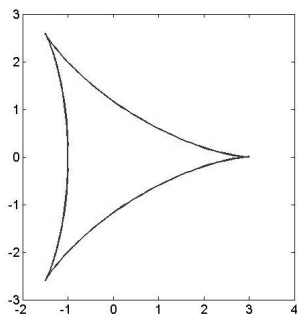
$\cos t = \cos t^*$ 이지만 sine함수는 기함수로

$\sin t = -\sin t^*$ 로 바뀐다.

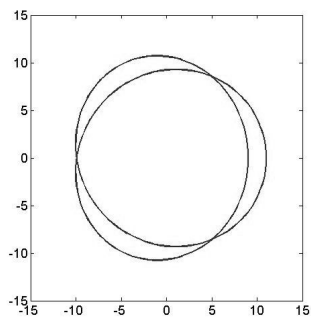
따라서 반시계방향에서 시계방향으로 방향도

바뀐다.

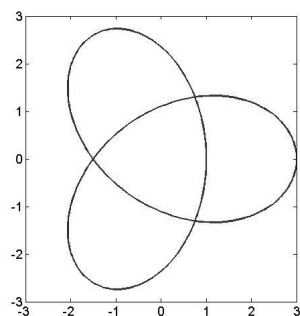
22. (a)



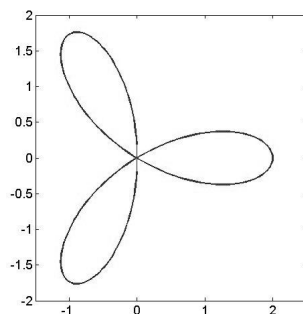
(b)  $k = 10$



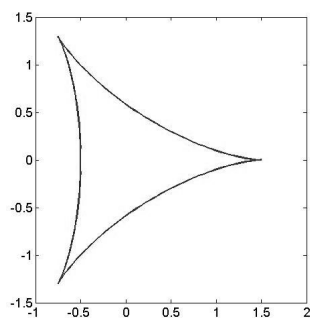
$k = 2$



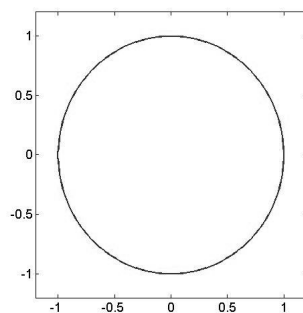
$k = 1$



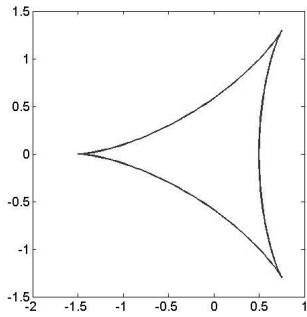
$k = \frac{1}{2}$



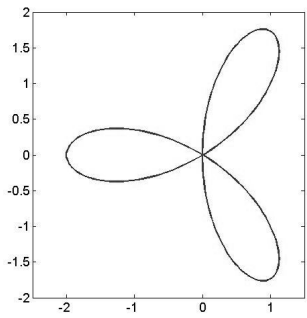
$k = 0$



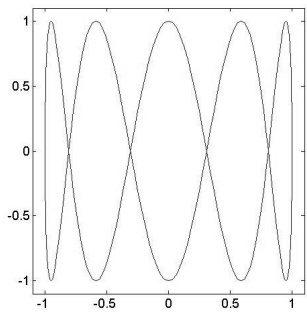
$$k = -\frac{1}{2}$$



$$k = -1$$

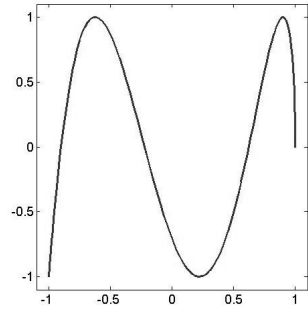


(c)

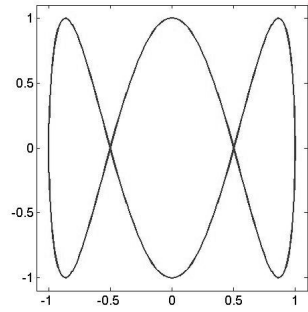


(d)  $\sin 0 = \sin kt$  식을 만족해야 하므로 모든 정수  $k$  값에 대하여 폐곡선이다.  $k=3$  일 때와  $k=3.5$  일 때를 도시해 보면,

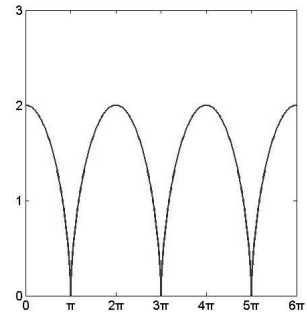
$$k = 3.5$$



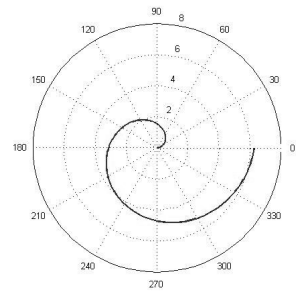
$$k = 3$$



(e)  $\omega = 1$ ,  $R = 1$  일 때를 도시하면,



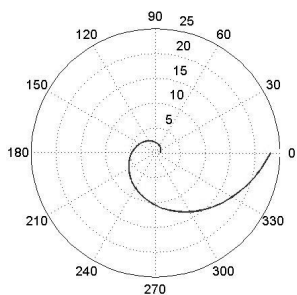
$$23. \rho = a\theta, a = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



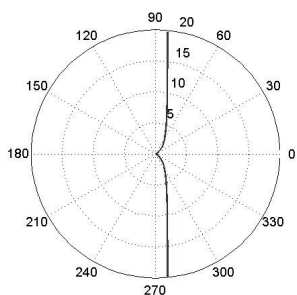




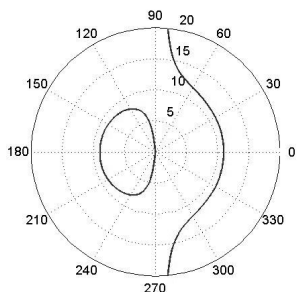
$$\rho = ae^{b\theta}, \quad a = 0.5, b = 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



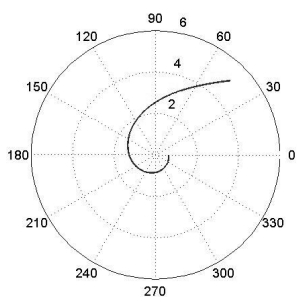
$$\rho = \frac{2a \sin^2 \theta}{\cos \theta}, \quad a = 1, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$$



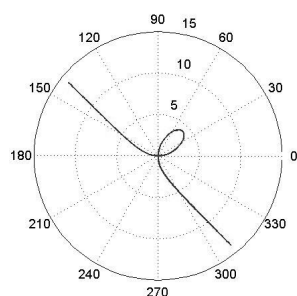
$$\rho = \frac{a}{\cos \theta} + b, \quad a = 1, b = 10, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



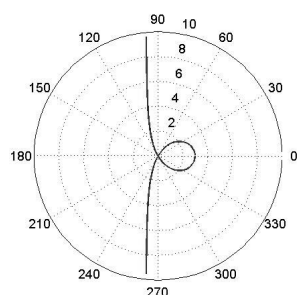
$$\rho = \frac{a}{\theta}, \quad a = 4, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 2\pi$$



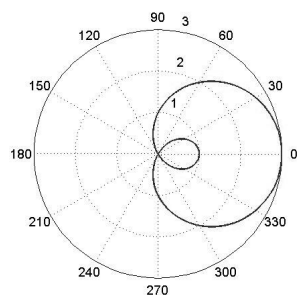
$$\rho = \frac{3a \sin 2\theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}, \quad a = 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



$$\rho = 2a \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}, \quad a = 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



$$\rho = 2a \cos \theta + b, \quad a = 1, b = 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

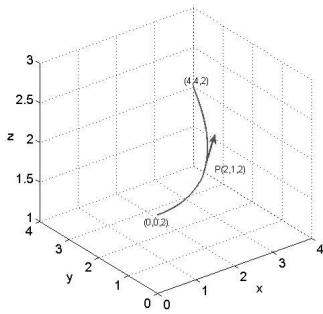


$$24. \quad \mathbf{r}'(t) = \left[ 1, \frac{1}{2}t, 0 \right], \quad \mathbf{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2/4}} \left[ 1, \frac{1}{2}t, 0 \right]$$

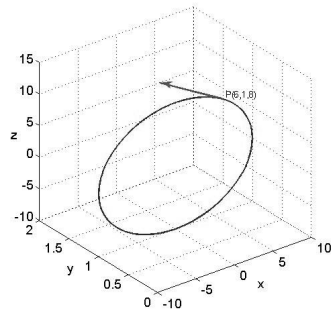
$$\mathbf{q}(w) = \left[ t + w, \frac{1}{4}t^2 + \frac{w}{2}t, 2 \right]$$

$P: (2, 1, 2)$  이므로  $t = 2$  이고

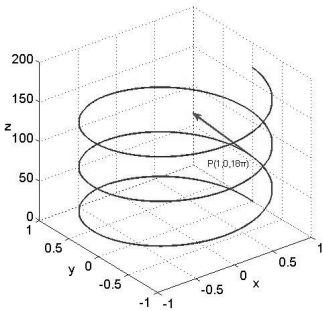
$\mathbf{q}(w) = [2 + w, 1 + w, 2]$  이다.



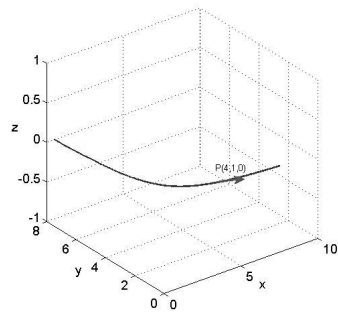
25.  $\mathbf{r}'(t) = [-10\sin t, 0, 10\cos t]$ ,  $\mathbf{u}(t) = [-\sin t, 0, \cos t]$   
 $\mathbf{q}(w) = [10\cos t - 10w\sin t, 1, 10\sin t + 10w\cos t]$   
 $P: (6, 1, 8)$  이므로  $\cos t = 0.6$ ,  $\sin t = 0.8$  이고  
 $\mathbf{q}(w) = [6 - 8w, 1, 8 + 6w]$  이다.



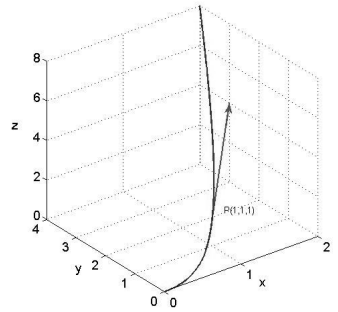
26.  $\mathbf{r}'(t) = [-\sin t, \cos t, 9]$ ,  $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{82}} [-\sin t, \cos t, 9]$   
 $\mathbf{q}(w) = [\cos t - w\sin t, \sin t + w\cos t, 9t - 9w]$   
 $P: (1, 0, 18\pi)$  이므로  $t = 2\pi$  이고  
 $\mathbf{q}(w) = [1, w, 18\pi - 9w]$  이다.



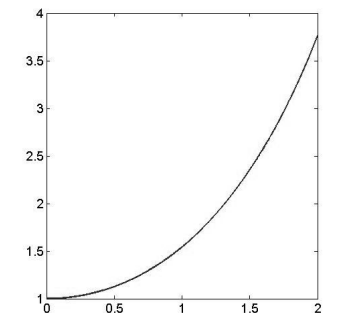
27.  $\mathbf{r}'(t) = \left[1, -\frac{4}{t^2}, 0\right]$ ,  $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+16/t^4}} \left[1, -\frac{4}{t^2}, 0\right]$   
 $\mathbf{q}(w) = \left[t + w, \frac{4}{t} - \frac{4w}{t^2}, 0\right]$   
 $P: (4, 1, 0)$  이므로  $t = 4$  이고  
 $\mathbf{q}(w) = \left[4 + w, 1 - \frac{w}{4}, 0\right]$  이다.



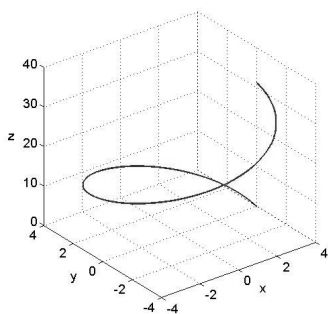
28.  $\mathbf{r}'(t) = [1, 2t, 3t^2]$ ,  $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} [1, 2t, 3t^2]$   
 $\mathbf{q}(w) = [t + w, t^2 + 2wt, t^3 + 3wt^2]$   
 $P: (1, 1, 1)$  이므로  $t = 1$  이고  
 $\mathbf{q}(w) = [1 + w, 1 + 2w, 1 + 3w]$  이다.



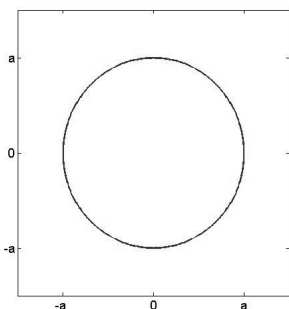
29.  $\mathbf{r}'(t) = [1, \sinh t]$ ,  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$   
 $l = \int_0^2 \sqrt{\cosh^2 t} dt = \int_0^2 \cosh t dt$   
 $= \sinh t \Big|_0^2 = \sinh 2 = 3.627$ .



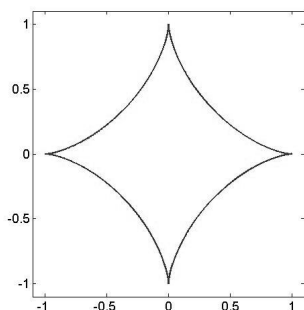
30.  $\mathbf{r}'(t) = [-4\sin t, 4\cos t, 5]$ ,  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 41$   
 $\mathbf{r}(0) = [4, 0, 0]$  이고  $\mathbf{r}(2\pi) = [4, 0, 10\pi]$  이므로  
 $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{41} dt = 2\sqrt{41}\pi$  이다.



31.  $\mathbf{r}'(t) = [-a \sin t, a \cos t]$ ,  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = a^2$   
 $\mathbf{r}(0) = [a, 0]$  이고  $\mathbf{r}(\pi) = [-a, 0]$  이므로  
 $l = \int_0^\pi a dt = a\pi$  이다.



32.  $\mathbf{r}'(t) = [-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t]$ ,  
 $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$   
 $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t} dt = 4 \int_0^{\pi/2} 3a \cos t \sin t dt$   
 $= 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -3a \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = 6a.$   
 $a = 1$  일 때, 도시하면



33.  $\mathbf{r}(t) = [t, f(t), 0]$  이므로  
 $\mathbf{r}'(t) = [1, f'(t), 0]$ ,  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 1 + (f')^2$  이다.  
 따라서  $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$  이다.

34.  $\mathbf{r}(\theta) = [\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta]$  이므로

$$\mathbf{r}'(t) = [\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta, \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta],$$

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = (\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)^2 + (\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta)^2$$

$$= (\rho')^2 + \rho^2.$$

따라서  $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$  이다.

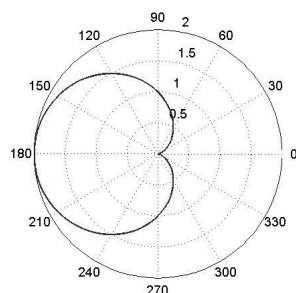
$\rho = a(1 - \cos \theta)$  이므로  $\rho' = a \sin \theta$  이다. 따라서

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \int_0^\pi 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= -8a \cos \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 8a$$

$a = 1$  일 때, 도시하면



35.  $\mathbf{v} = [1, 8t, 0]$ ,  $|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 64t^2}$ ,  $\mathbf{a} = [0, 8, 0]$

36.  $\mathbf{v} = [2, 4, 0]$ ,  $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{5}$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

37.  $\mathbf{v} = [Rw \cos wt + R, -Rw \sin wt]$ ,

$$\mathbf{a} = [-Rw^2 \sin wt, -Rw^2 \cos wt]$$

$y$  값이 최대일 때,  $t = \frac{2n\pi}{w}$  ( $n$ : 정수) 이다.

$$\mathbf{v}\left(\frac{2n\pi}{w}\right) = [Rw + R, 0], \mathbf{a}\left(\frac{2n\pi}{w}\right) = [0, -Rw^2] \text{ 이다.}$$

38.  $\mathbf{v} = [-\sin t, 2\cos t, 0]$ ,  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}$ ,

$$\mathbf{a} = [-\cos t, -2\sin t, 0]$$

39.  $\mathbf{v} = [2\cos 2t, -\sin t]$ ,

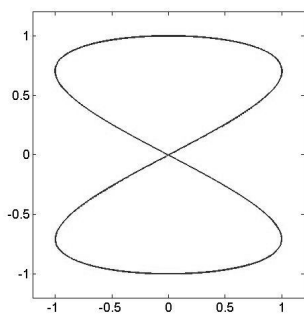
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(2\cos 2t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{\frac{4\cos 4t - \cos 2t + 5}{2}}$$

$$\mathbf{a} = [-4\sin 2t, -\cos t],$$

$$\mathbf{a}_{\tan} = \frac{-8\sin 4t + \sin 2t}{4\cos 4t - \cos 2t + 5} \mathbf{v}$$

$$= \frac{-8\sin 4t + \sin 2t}{4\cos 4t - \cos 2t + 5} [2\cos 2t, -\sin t],$$

$$\mathbf{a}_{\text{norm}} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\tan}$$



$$40. \mathbf{v} = [-2\sin t - 2\sin 2t, 2\cos t - 2\cos 2t],$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2\sin t - 2\sin 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2}$$

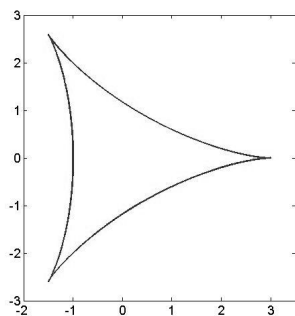
$$= \sqrt{8 - 8\cos 3t} = \sqrt{16\sin^2 \frac{3}{2}t} = 4\sin \frac{3}{2}t$$

$$\mathbf{a} = [-2\cos t - 4\cos 2t, -2\sin t + 4\sin 2t],$$

$$\mathbf{a}_{\tan} = \frac{12\sin 3t}{8 - 8\cos 3t} \mathbf{v}$$

$$= 3\cot \frac{3}{2}t [-\sin t - \sin 2t, \cos t - \cos 2t],$$

$$\mathbf{a}_{\text{norm}} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\tan}$$



$$41. \mathbf{v} = [\cos t, -\sin t, -2\sin 2t],$$

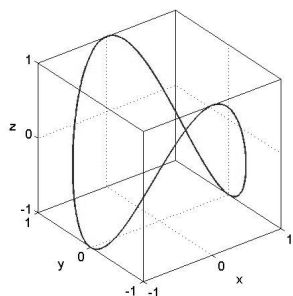
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 4\sin^2 2t} = \sqrt{3 - 2\cos 4t}$$

$$\mathbf{a} = [-\sin t, -\cos t, -4\cos 2t],$$

$$\mathbf{a}_{\tan} = \frac{8\sin 2t \cos 2t}{3 - 2\cos 4t} \mathbf{v}$$

$$= \frac{4\sin 4t}{3 - 2\cos 4t} [\cos t, -\sin t, -2\sin 2t],$$

$$\mathbf{a}_{\text{norm}} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\tan}$$



$$42. \mathbf{v} = [c\cos t - ct\sin t, c\sin t + ct\cos t, c],$$

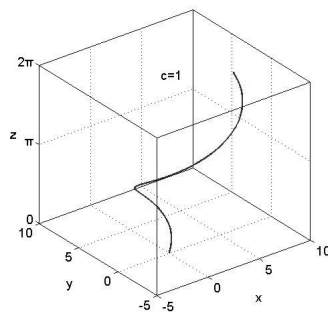
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2c^2 + c^2t^2} = |c|\sqrt{2+t^2}$$

$$\mathbf{a} = [-2c\sin t - ct\cos t, 2c\cos t - ct\sin t, 0],$$

$$\mathbf{a}_{\tan} = \frac{c^2t\cos^2 t + c^2t^2\sin^2 t}{c^2(2+t^2)} \mathbf{v}$$

$$= \frac{t}{2+t^2} [c\cos t - ct\sin t, c\sin t + ct\cos t, c]$$

$$\mathbf{a}_{\text{norm}} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\tan}$$



$$43. \text{지구의 공전 반지름을 } R \text{이라 하자.}$$

$$\text{공전 각속도는 } w = 2\pi/\text{year} = 1.992 \times 10^{-7}/\text{sec}$$

$$\text{공전 선속도는 } |\mathbf{v}| = Rv = 30 \text{ km/sec}$$

$$\text{공전 가속도는 } |\mathbf{a}| = Rv^2 = 5.98 \times 10^{-6} \text{ km/sec}^2$$

$$44. R = 3.85 \times 10^8 \text{ m}$$

$$w = 2\pi/2.36 \times 10^6 = 2.66 \times 10^{-6}/\text{sec}$$

$$|\mathbf{v}| = Rv = 1.02 \times 10^3 \text{ m/sec}$$

$$|\mathbf{a}| = Rv^2 = 2.71 \times 10^{-3} \text{ m/sec}^2$$

$$45. R = 3960 + 80 = 4040 \text{ miles} = 21331200 \text{ ft}$$

$$g = |\mathbf{a}| = Rv^2 = 31 \text{ ft/sec}^2$$

$$|\mathbf{v}| = Rv = \sqrt{Rg} = 2.5715 \times 10^4 \text{ ft/sec}$$

$$46. R = 3960 + 450 = 4410 \text{ miles}$$

$$w = 2\pi/100 = 0.06283/\text{min}$$

$$|\mathbf{v}| = Rv = 277.1 \text{ miles/min}$$

$$g = Rv^2 = 17.41 \text{ miles/min}^2$$

$$47. \mathbf{r}(t) = [a\cos t, a\sin t],$$

$$\mathbf{r}'(t) = [-a\sin t, a\cos t], \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = a^2$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2} d\tilde{t} = at.$$

$$\mathbf{r}(s) = \left[ a\cos \frac{s}{a}, a\sin \frac{s}{a} \right],$$

$$\mathbf{r}'(s) = \left[ -\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a} \right],$$

$$\mathbf{r}''(s) = \left[ -\frac{1}{a}\cos \frac{s}{a}, -\frac{1}{a}\sin \frac{s}{a} \right],$$

$$\kappa(s) = \frac{1}{a}$$

48.  $\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  라 하자.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} \text{ 이고 } \mathbf{u}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}' \frac{dt}{ds} \text{ 이므로}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \mathbf{r}' \frac{dt}{ds} \right) = \mathbf{r}'' \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathbf{r}' \frac{d^2t}{ds^2} \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{dt}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}} \right) \frac{dt}{ds} \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^{-3/2} (2\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^{-1/2} \\ &= -(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^{-2} \end{aligned}$$

$$\text{이 다. 따라서 } \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{r}'' \left( \frac{1}{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} \right) + \mathbf{r}' \left( -\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^2} \right) \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} &= \frac{1}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^2} (\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'') \\ &\quad - \frac{2(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')^2}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^3} + \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')^2}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^4} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') \\ &= \frac{\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^2} - \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')^2}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^3} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \kappa(s) = \frac{\sqrt{(\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')^2}}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^{3/2}} \text{ 이다.}$$

49.  $\mathbf{r}(t) = [t, f(t)]$ ,  $\mathbf{r}'(t) = [1, f'(t)]$ ,  $\mathbf{r}''(t) = [0, f''(t)]$ .

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{(f'')^2(1+(f')^2) - (f'f'')^2}}{(1+(f')^2)^{3/2}} = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

50.  $\tau(s) = -\mathbf{p}(s) \cdot \mathbf{b}'(s) = -\mathbf{p} \cdot \frac{d}{ds}(\mathbf{u} \times \mathbf{p})$

$$\begin{aligned} &= -\mathbf{p} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} \times \mathbf{p} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right) \\ &= -\mathbf{p} \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{ds} \times \mathbf{p} \right) - \mathbf{p} \cdot \left( \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right) \\ &= -\left( \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} \mathbf{p} \right) - \left( \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right) \\ &= -\left( \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right) = \left( \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{u}' \text{ 이므로 } \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\kappa} \mathbf{u}' \right) = -\frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{u}' + \frac{1}{\kappa} \mathbf{u}'' \text{ 이다.}$$

$\mathbf{u} = \mathbf{r}'$  이므로

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right) &= \left( \mathbf{u} \cdot \frac{1}{\kappa} \mathbf{u}' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{u}' + \frac{1}{\kappa} \mathbf{u}'' \right) \\ &= \left( \mathbf{u} \cdot \frac{1}{\kappa} \mathbf{u}' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} \mathbf{u}' \right) + \left( \mathbf{u} \cdot \frac{1}{\kappa} \mathbf{u}' + \frac{1}{\kappa} \mathbf{u}'' \right) \\ &= \frac{1}{\kappa^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'') = \frac{1}{\kappa^2} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''') \end{aligned}$$

이 다.

51.  $\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  라 하자.

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}' \frac{dt}{ds}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \mathbf{r}' \frac{dt}{ds} \right) = \mathbf{r}'' \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathbf{r}' \frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} &= \frac{d}{ds} \left( \mathbf{r}'' \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathbf{r}' \frac{d^2t}{ds^2} \right) \\ &= \mathbf{r}''' \left( \frac{dt}{ds} \right)^3 + \mathbf{r}'' \frac{d}{ds} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathbf{r}'' \frac{dt}{ds} \left( \frac{d^2t}{ds^2} \right) + \mathbf{r}' \frac{d^3t}{ds^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right) &= \left( \mathbf{r}' \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \mathbf{r}'' \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 \cdot \mathbf{r}''' \left( \frac{dt}{ds} \right)^3 \right) \\ &= \left( \frac{dt}{ds} \right)^6 (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'''). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^3}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'') - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')^2} \frac{1}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^3} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''') \\ &= \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')^2}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'') - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 52. \quad \mathbf{r}'(s) &= \left[ -\frac{a}{K} \sin\left(\frac{s}{K}\right), \frac{a}{K} \cos\left(\frac{s}{K}\right), \frac{c}{K} \right], \\ \mathbf{r}''(s) &= \left[ -\frac{a}{K^2} \cos\left(\frac{s}{K}\right), -\frac{a}{K^2} \sin\left(\frac{s}{K}\right), 0 \right], \\ \mathbf{r}'''(s) &= \left[ \frac{a}{K^3} \sin\left(\frac{s}{K}\right), -\frac{a}{K^3} \cos\left(\frac{s}{K}\right), 0 \right], \\ \kappa(s) &= \frac{a}{K^2} \end{aligned}$$

$$\tau(s) = \frac{K^4}{a^2} \begin{vmatrix} -\frac{a}{K} \sin\left(\frac{s}{K}\right) & \frac{a}{K} \cos\left(\frac{s}{K}\right) & \frac{c}{K} \\ -\frac{a}{K^2} \cos\left(\frac{s}{K}\right) & -\frac{a}{K^2} \sin\left(\frac{s}{K}\right) & 0 \\ \frac{a}{K^3} \sin\left(\frac{s}{K}\right) & -\frac{a}{K^3} \cos\left(\frac{s}{K}\right) & 0 \end{vmatrix} = \frac{c}{K^2}$$

53.  $\mathbf{r}'(t) = [1, 2t, 3t^2]$ ,  $\mathbf{r}''(t) = [0, 2, 6t]$ ,  $\mathbf{r}'''(t) = [0, 0, 6]$  이

$$\text{므로 } \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 1 + 4t^2 + 9t^4, \quad \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'' = 4 + 36t^2,$$

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 4t + 18t^3, \quad (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''') = \begin{vmatrix} 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{12}{(1 + 4t^2 + 9t^4)(4 + 36t^2) - (4t + 18t^3)^2} \\ &= \frac{3}{1 + 9t^2 + 9t^4}. \end{aligned}$$

54.  $\mathbf{p} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{u}'$  이므로  $\mathbf{u}' = \kappa \mathbf{p}$  이다.

$$\mathbf{p}' = \mathbf{b}' \times \mathbf{u} + \mathbf{b} \times \mathbf{u}' = -\tau \mathbf{p} \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \kappa \mathbf{p} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{u}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' &= \mathbf{u}' \times \mathbf{p} + \mathbf{u} \times \mathbf{p}' \\ &= \kappa \mathbf{p} \times \mathbf{p} + \mathbf{u} \times (\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \tau \mathbf{b} - \mathbf{u} \times \kappa \mathbf{u} = -\tau \mathbf{p} \end{aligned}$$

55.  $\mathbf{r}'(t) = [-a \sin t, a \cos t, c]$ ,  
 $\mathbf{r}''(t) = [-a \cos t, -a \sin t, 0]$ ,  
 $\mathbf{r}'''(t) = [a \sin t, -a \cos t, 0]$

$$\text{이므로 } \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = a^2 + c^2, \quad \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'' = a^2, \quad \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0,$$

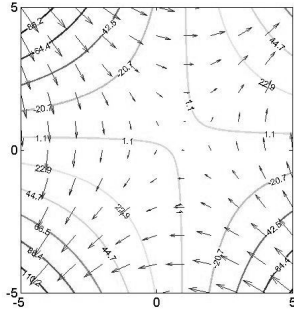
$$\begin{aligned} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''') &= \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & c \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2 c \cos^2 t + a^2 c \sin^2 t = a^2 c. \end{aligned}$$

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)a^2}}{(a^2 + c^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

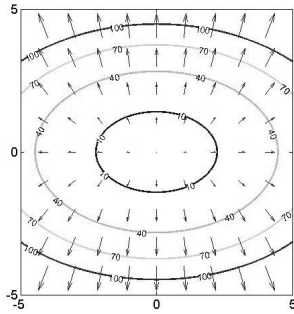
$$\tau(s) = \frac{a^2 c}{(a^2 + c^2)a^2} = \frac{c}{a^2 + c^2}$$

## 3.7 Gradient of a Scalar Field. Directional Derivative

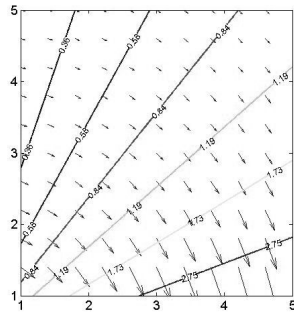
1.  $\nabla f = [4y-2, 4(x-1)]$



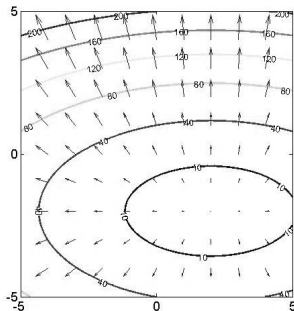
2.  $\nabla f = [4x, 10y]$



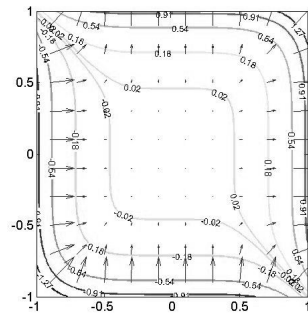
3.  $\nabla f = \left[ \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right]$



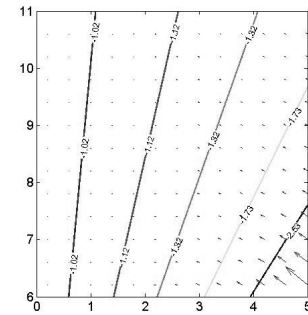
4.  $\nabla f = [2(x-2), 2(2y+4)]$



5.  $\nabla f = [5x^4, 5y^4]$



6.  $\nabla f = \left[ \frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}, \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2} \right]$



$$\begin{aligned} 7. \nabla(f^n) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x}(f^n), \frac{\partial}{\partial y}(f^n), \frac{\partial}{\partial z}(f^n) \right] \\ &= [nf^{n-1}f_x, nf^{n-1}f_y, nf^{n-1}f_z] \\ &= nf^{n-1}[f_x, f_y, f_z] = nf^{n-1}\nabla f \end{aligned}$$

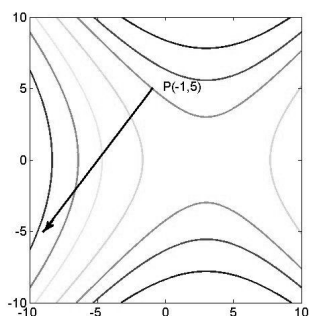
$$\begin{aligned} 8. \nabla(fg) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x}(fg), \frac{\partial}{\partial y}(fg), \frac{\partial}{\partial z}(fg) \right] \\ &= [f_xg + fg_x, f_yg + fg_y, f_zg + fg_z] \\ &= [f_x, f_y, f_z]g + f[g_x, g_y, g_z] \\ &= g\nabla f + f\nabla g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right) \right] \\ &= \left[ \frac{f_xg - fg_x}{g^2}, \frac{f_yg - fg_y}{g^2}, \frac{f_zg - fg_z}{g^2} \right] \\ &= \frac{1}{g^2} \{ [f_x, f_y, f_z]g - f[g_x, g_y, g_z] \} \\ &= \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \end{aligned}$$

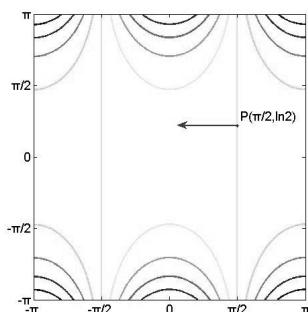
$$\begin{aligned} 10. \nabla^2(fg) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(fg) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(fg) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(fg) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f_xg + fg_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f_yg + fg_y) + \frac{\partial}{\partial z}(f_zg + fg_z) \\ &= f_{xx}g + 2f_xg_x + fg_{xx} \\ &\quad + f_{yy}g + 2f_yg_y + fg_{yy} + f_{zz}g + 2f_zg_z + fg_{zz} \\ &= (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz})g \\ &\quad + 2(f_xg_x + f_yg_y + f_zg_z) + f(g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}) \\ &= g\nabla^2f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2g \end{aligned}$$

11.  $\nabla f = [y, x], \nabla f(P) = [-4, 3]$

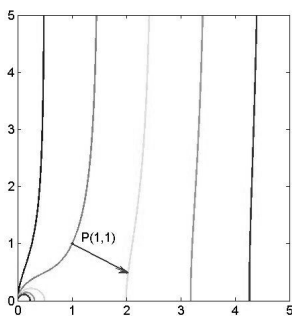
12.  $\nabla f = \left[ \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right], \nabla f(P) = \left[ 0, -\frac{1}{2} \right]$
13.  $\nabla f = \left[ \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right], \nabla f(P) = \left[ \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right]$
14.  $\nabla f = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} [-x, -y, -z],$   
 $\nabla f(P) = \left[ -\frac{3}{2000}, 0, -\frac{1}{500} \right]$
15.  $\nabla f = [4x, 8y, 18z], \nabla f(P) = [-4, 16, -72]$
16.  $\nabla f = [50x, 18y, 32z]$
17.  $\nabla f = [8x, 50y]$
18.  $\mathbf{v} = [2x - 6, -2y], \mathbf{v}(P) = [-8, -10]$



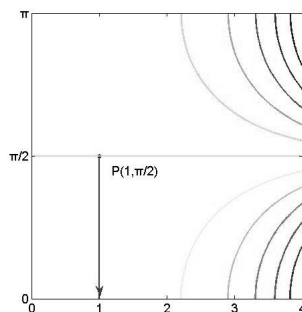
19.  $\mathbf{v} = [-\sin x \cosh y, \cos x \sinh y], \mathbf{v}(P) = \left[ -\frac{5}{4}, 0 \right]$



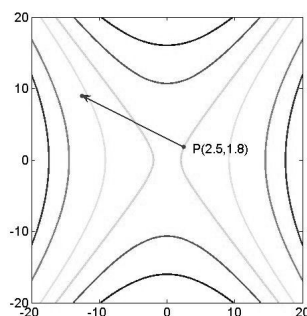
20.  $\nabla f = \left[ x - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right], \nabla f(P) = \left[ 1, -\frac{1}{2} \right]$



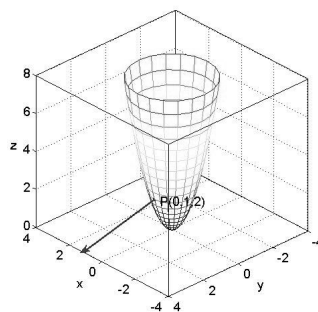
21.  $\mathbf{v} = [e^x \cos y, -e^x \sin y], \mathbf{v}(P) = [0, -e]$



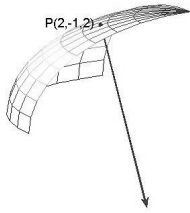
22.  $P(x, 2n\pi + \frac{3}{2}\pi)$  에 서  $\mathbf{v}(P) = [0, e^x]$
23.  $P(x, n\pi)$  에 서  $\mathbf{v}(P) = [e^x, 0]$  or  $[-e^x, 0]$
24.  $-\nabla T = [-6x, 4y], -\nabla T(P) = [-15.0, 7.2]$



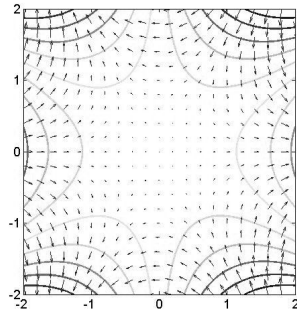
25.  $-\nabla T = \left[ \frac{2xz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2yz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-1}{x^2 + y^2} \right],$   
 $-\nabla T(P) = [0, 4, -1]$



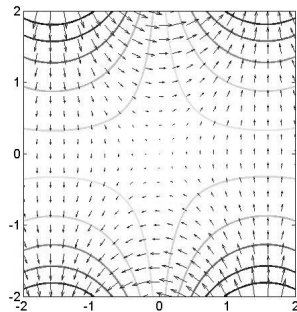
26.  $-\nabla T = [-2x, -2y, -8z]$ ,  $-\nabla T(P) = [-4, 2, -16]$



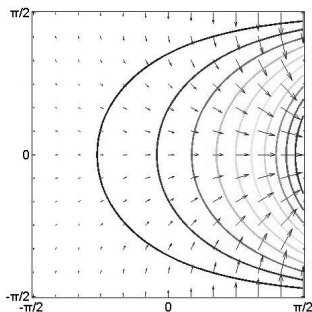
27. (a)  $x^3 - 3xy^2$



(b)  $\sin x \sinh y$



(c)  $e^x \cos y$



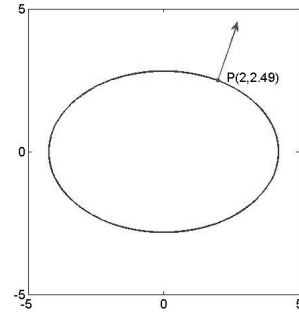
28.  $\nabla z = [-2x, -18y]$ ,  $\nabla z(P) = [-8, -18]$

$P$ 에서 가장 가파른 비탈길의 방향은 벡터  $[-4, -9]$ 의 방향이다.

29. 실제의 계 즉 Lagrangian System에서의 열전달 또는 유수를 분석할 때 계의 경계에서

$|\text{grad}f(P)| > |\text{grad}f(Q)|$ 을 만족하는 두 점  $P, Q$ 에서의 물리적 의미는  $P$ 에서의 열전달 또는 유수의 입.출 속도가  $Q$ 에서의 값보다 상대적으로 크다는 것을 의미한다.

30.  $f = 4x^2 + 9y^2 - 72$ ,  
 $\nabla f = [8x, 18y]$ ,  $\nabla f(P) = [16, 6\sqrt{56}]$



31.  $f = 16x^2 - y^2 - 399$ ,  
 $\nabla f = [32x, -2y]$ ,  $\nabla f(P) = [160, -2]$

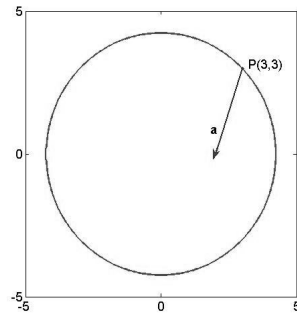
32.  $f = ax + by + cy - d$ ,  $\nabla f = [a, b, c]$

33.  $f = 6x^2 + 2y^2 + z^2 - 225$ ,  
 $\nabla f = [12x, 4y, 2z]$ ,  $\nabla f(P) = [60, 20, 10]$

34.  $f = x^4 + y^4 + z^4 - 273$ ,  
 $\nabla f = [4x^3, 4y^3, 4z^3]$ ,  $\nabla f(P) = [32, 4, 256]$

35.  $f = z - x^2 - y^2 + 638$ ,  
 $\nabla f = [-2x, -2y, 1]$ ,  $\nabla f(P) = [-6, -8, 1]$

36.  $\nabla f = [4x, 4y]$ ,  $\nabla f(P) = [12, 12]$ ,  $|\mathbf{a}| = \sqrt{10}$   
 $D_{\mathbf{a}}f(P) = \left[ \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}} \right] \cdot [12, 12] = -\frac{48}{\sqrt{10}}$



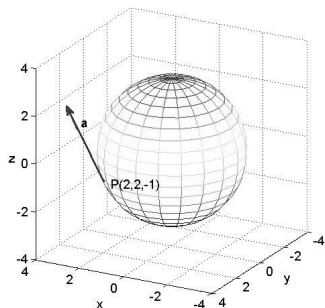
37.  $\nabla f = [1, -1]$ ,  $\nabla f(P) = [1, -1]$ ,  $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}$

$D_{\mathbf{a}}f(P) = \left[ \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right] \cdot [1, -1] = \frac{1}{\sqrt{5}}$



$$38. \nabla f = [2x, 2y, 2z], \nabla f(P) = [4, 4, -2], |\mathbf{a}| = \sqrt{11}$$

$$D_{\mathbf{a}}f(P) = \left[ \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}} \right] \cdot [4, 4, -2] = \frac{2}{\sqrt{11}}$$



$$39. \nabla f = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} [-x, -y, -z],$$

$$\nabla f(P) = \left[ -\frac{3}{125}, 0, -\frac{4}{125} \right], |\mathbf{a}| = \sqrt{3}$$

$$D_{\mathbf{a}}f(P) = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \cdot \left[ -\frac{3}{125}, 0, -\frac{4}{125} \right]$$

$$= \frac{-7}{125\sqrt{3}}$$

$$40. \nabla f = \left[ \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right], \nabla f(P) = \left[ \frac{2}{3}, 0 \right], |\mathbf{a}| = \sqrt{2}$$

$$D_{\mathbf{a}}f(P) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cdot \left[ \frac{2}{3}, 0 \right] = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$41. \nabla f = [yz, xz, xy], \nabla f(P) = [3, -3, -1], |\mathbf{a}| = \sqrt{6}$$

$$D_{\mathbf{a}}f(P) = \left[ \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right] \cdot [3, -3, -1] = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$42. \nabla f = [8x, 50y, 18z], \nabla f(P) = [40, 0, 0], |\mathbf{a}| = \sqrt{2}$$

$$D_{\mathbf{a}}f(P) = \left[ 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cdot [40, 0, 0] = 0$$

$$43. \frac{\partial f}{\partial x} = yz, \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \frac{\partial f}{\partial z} = xy, f = xyz$$

$$44. \frac{\partial f}{\partial x} = ye^x, \frac{\partial f}{\partial y} = e^x, \frac{\partial f}{\partial z} = z^2, f = ye^x + \frac{1}{3}z^3$$

$$45. \frac{\partial f}{\partial x} = v_1(x), \frac{\partial f}{\partial y} = v_2(y), \frac{\partial f}{\partial z} = v_3(z),$$

$$f = \int v_1(x)dx + \int v_2(y)dy + \int v_3(z)dz$$

### 3.8 Divergence of a Vector Field

$$1. \operatorname{div} \mathbf{v} = 4x - 6y + 16z, 9$$

$$2. \operatorname{div} \mathbf{v} = x^2z \cos x^2yz - xy^2 \sin xy^2z, \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$3. \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{-x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} = 0, 0$$

$$4. \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, 0$$

$$5. \operatorname{div} \mathbf{v} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz, 36$$

$$6. \operatorname{div} \mathbf{v} = 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$+ 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$+ 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$= 0$$

$$7. \nabla \cdot \mathbf{v} = e^y \cos x + e^y \cos x + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} = -2e^y \cos x \text{ 이다. 따라서 } v_3 = -2ze^y \cos x \text{ 이다.}$$

$$8. \operatorname{div} \mathbf{v} = 2 + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

$$(a) \frac{\partial v_3}{\partial z} > -2 \text{ 예를들면 } v_3 = 0$$

$$(b) \begin{cases} \frac{\partial v_3}{\partial z} > -2 & |z| < 1 \\ \frac{\partial v_3}{\partial z} < -2 & |z| > 1 \end{cases}$$

$$\text{예를 들면 } v_3 = -z - \frac{1}{3}z^3$$

$$9. \mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] \text{ 라 하자}$$

$$(a) \operatorname{div}(k\mathbf{v}) = \frac{\partial(kv_1)}{\partial x} + \frac{\partial(kv_2)}{\partial y} + \frac{\partial(kv_3)}{\partial z}$$

$$= k \frac{\partial v_1}{\partial x} + k \frac{\partial v_2}{\partial y} + k \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

$$= k \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) = k \operatorname{div} \mathbf{v}$$

$$(b) \operatorname{div}(f\mathbf{v}) = \frac{\partial(fv_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fv_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fv_3)}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + f \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} v_2 + f \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} v_3 + f \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

$$= f \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2 + \frac{\partial f}{\partial z} v_3 \right)$$

$$= f \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

$$(c) \operatorname{div}(f\nabla g) = \frac{\partial}{\partial x} \left( f \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( f \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( f \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + f \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

$$= f \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right)$$

$$+ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

$$= f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$$

$$(d) \operatorname{div}(f\nabla g) - \operatorname{div}(g\nabla f)$$

$$= (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) - (g \nabla^2 f + \nabla g \cdot \nabla f)$$

$$= f \nabla^2 g - g \nabla^2 f$$

$$f\mathbf{v} = [axe^{xyz}, bxe^{xyz}, cze^{xyz}],$$

$$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = ae^{xyz} + axye^{xyz}$$

$$+ be^{xyz} + bxye^{xyz} + ce^{xyz} + cxye^{xyz}$$

$$= (a+b+c)e^{xyz} + (a+b+c)xye^{xyz}$$

$$= (a+b+c)(1+xyz)e^{xyz}.$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = a+b+c, \nabla f = [ye^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz}],$$

$$\begin{aligned}
 f \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f &= (a+b+c)e^{xyz} \\
 &\quad + axyz e^{xyz} + bxyz e^{xyz} + cxyz e^{xyz} \\
 &= (a+b+c)(1+xyz)e^{xyz}.
 \end{aligned}$$

문제 6번에서

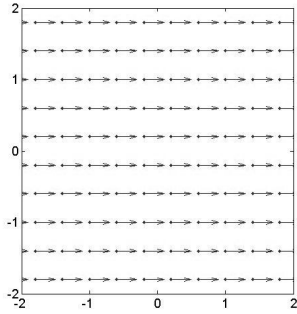
$$\begin{aligned}
 f &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, \mathbf{v} = [-x, -y, -z] \text{ 이므로} \\
 \operatorname{div} \mathbf{v} &= -3, \nabla f = -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} [x, y, z] \text{ 이다.} \\
 \operatorname{div}(f\mathbf{v}) &= f \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \\
 &= -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\
 &\quad + 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (x^2 + y^2 + z^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f &= x^2 - y^2, g = e^{x+y} \text{ 이므로} \\
 \nabla f &= [2x, -2y], \nabla g = [e^{x+y}, e^{x+y}] \text{ 이고}
 \end{aligned}$$

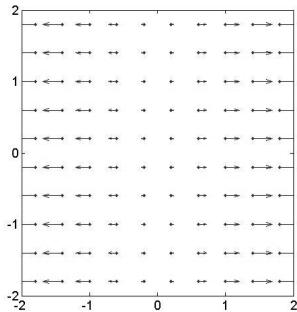
$$\begin{aligned}
 f \nabla g &= (x^2 - y^2) [e^{x+y}, e^{x+y}], \\
 \nabla^2 g &= e^{x+y} + e^{x+y} = 2e^{x+y}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(f \nabla g) &= 2xe^{x+y} + (x^2 - y^2)e^{x+y} - 2ye^{x+y} + (x^2 - y^2)e^{x+y} \\
 &= (2x + 2x^2 - 2y - 2y^2)e^{x+y} \\
 f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g &= 2e^{x+y}(x^2 - y^2) + 2xe^{x+y} - 2ye^{x+y} \\
 &= (2x^2 - 2y^2 + 2x - 2y)e^{x+y}
 \end{aligned}$$

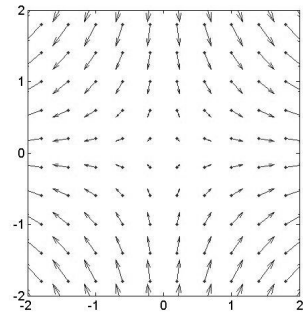
10. (a)  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$



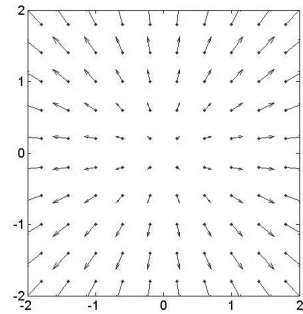
(b)  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 1$



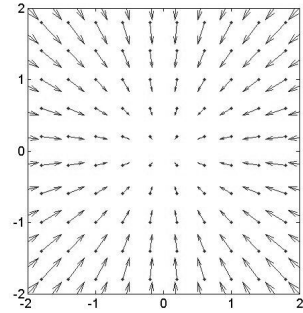
(c)  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$



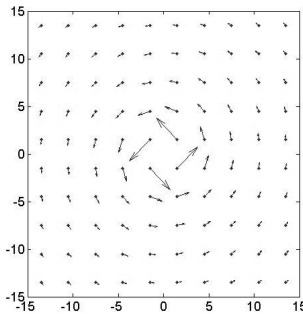
(d)  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 2$



(e)  $\operatorname{div} \mathbf{v} = -2$



$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$



11.  $\mathbf{v} = [y, 0, 0]$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  이므로 비압축성이다.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = y, \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \text{ 이므로 } z = c_3, y = c_2 \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = c_2 \text{ 이므로 } x = c_2 t + c_1 \text{ 이다. 즉,}$$



- $\mathbf{r}(t) = [c_2 t + c_1, c_2, c_3]$  이므로  $\mathbf{r}(0) = [c_1, c_2, c_3]$  이고  
 $\mathbf{r}(1) = [c_2 + c_1, c_2, c_3]$  이다. 따라서  $x=0, x=1, y=0,$   
 $y=1, z=0, z=1$ 로 둘러싸인 정육면체는  $x=y,$   
 $x=y+1, y=0, y=1, z=0, z=1$ 로 둘러싸인 밑면이  
 평행사변형인 기둥으로 변형되므로 부피는 1이다.
12.  $\mathbf{v} = [x, 0, 0], \operatorname{div} \mathbf{v} = 1.$   
 $\frac{\partial x}{\partial t} = x, \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \frac{\partial z}{\partial t} = 0$  이므로  $z = c_3, y = c_2$ 이다.  
 $\frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial t} = 1$  이므로  $x = c_1 e^t$ 이다. 즉,  
 $\mathbf{r}(t) = [c_1 e^t, c_2, c_3]$  이므로  $\mathbf{r}(0) = [c_1, c_2, c_3]$  이고  
 $\mathbf{r}(1) = [c_1 e, c_2, c_3]$  이다. 따라서  $x=0, x=1, y=0,$   
 $y=1, z=0, z=1$ 로 둘러싸인 정육면체는  $x=0,$   
 $x=e, y=0, y=1, z=0, z=1$ 로 둘러싸인 직육면체  
 로 변형되므로 부피는  $e$ 이다.
13.  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]$  라 하면  $\mathbf{r} = [x, y, z]$  이므로  
 $\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = [w_2 z - w_3 y, -w_1 z + w_3 x, w_1 y - w_2 x],$   
 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$
14.  $\mathbf{u} = [y, z, x], \mathbf{v} = [z, x, y]$  라 하면  
 $\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ 이지만  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ 이다.  
 또한 모든 상수  $k$ 에 대하여  $\mathbf{u} \neq \mathbf{v} + k$ 이다.
15.  $\operatorname{grad} f = [-2\cos x \sin x, 2\sin y \cos y],$

- $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 2\sin^2 x - 2\cos^2 x + 2\cos^2 y - 2\sin^2 y$   
 $= -2(\cos 2x - \cos 2y)$
16.  $\operatorname{grad} f = [yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz}],$   
 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = y^2 z^2 e^{xyz} + x^2 z^2 e^{xyz} + x^2 y^2 e^{xyz}$   
 $= (y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2) e^{xyz}$
17.  $\operatorname{grad} f = \left[ \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right],$   
 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$
18.  $\operatorname{grad} f = \left[ \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right],$   
 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$   
 $= \frac{-(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
19.  $\operatorname{grad} f = \left[ \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right],$   
 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{6x^2 - 2y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$   
 $+ \frac{-2x^2 + 6y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{-2x^2 - 2y^2 + 6z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$   
 $= \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$
20.  $\operatorname{grad} f = [2e^{2x} \cosh 2y, 2e^{2x} \sinh 2y],$   
 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 4e^{2x} \cosh 2y + 4e^{2x} \cosh 2y = 8e^{2x} \cosh 2y$

### 3.9 Curl of a Vector Field

2.  $\mathbf{v}$ 가  $yz$ -평면에 평행하므로  $\mathbf{v} = [0, y, z]$ 이다.

$$\operatorname{curl}(\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = [0, 0, 0]$$

3.  $\operatorname{grad} f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right],$

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right]$$

$$= \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3],$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[ \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right]$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) = \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} \right) + \left( -\frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} \right)$$

$$= 0$$

4.  $\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4y^2 & 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 6x - 8y]$

5.  $\operatorname{curl}(\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 y z & x y^3 z & x y z^3 \end{vmatrix}$   
 $= [xz^3 - zy^3, -yz^3 + x^3 zy, y^3 z - x^3 z]$

6.  $\mathbf{v} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} [x, y, z],$

$$v_1 = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$v_2 = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$v_3 = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = [0, 0, 0]$$

7.  $\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & e^{-x} \sin y \end{vmatrix} = [e^{-x} \cos y, e^{-x} \sin y, 0]$

$$8. \operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{-z^2} & e^{-x^2} & e^{-y^2} \end{vmatrix} \\ = [-2ye^{-y^2}, -2ze^{-z^2}, -2xe^{-x^2}]$$

9.  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  이므로 비압축적이다.

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 3z^2 & 0 \end{vmatrix} = [-6z, 0, 0]$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0, \frac{\partial y}{\partial t} = 3z^2, \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \text{ 이므로 } z = c_3, x = c_1 \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 3c_3^2 \text{ 이므로 } y = 3c_3^2 t + c_2 \text{ 이고}$$

$$\mathbf{r}(t) = [c_1, 3c_3^2 t + c_2, c_3] \text{ 이다.}$$

10.  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \sec x \tan x$  이고

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sec x & \csc x & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, -\csc x \cot x] \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sec x, \frac{\partial y}{\partial t} = \csc x, \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\cos x \partial x = \partial t, \sin x = t + c_1, x = \arcsin(t + c_1) \text{ 이고}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{t + c_1}, y = \ln|t + c_1| + c_2 \text{ 이다. } z = c_3 \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{r}(t) = [\arcsin(t + c_1), \ln|t + c_1| + c_2, c_3] \text{ 이다.}$$

11.  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  이므로 비압축적이다.

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -2x & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, -3]$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = y, \frac{\partial y}{\partial t} = -2x, \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \text{ 이므로 } \frac{\partial x}{y} = \partial t = \frac{\partial y}{-2x},$$

$$2x \partial x = -y \partial y, 4x \partial x + 2y \partial y = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } 2x^2 + y^2 = c, z = c_3 \text{ 이다.}$$

12.  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  이므로 비압축적이다.

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & \pi \end{vmatrix} = [0, 0, 2]$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -y, \frac{\partial y}{\partial t} = x, \frac{\partial z}{\partial t} = \pi \text{ 이므로 } \frac{\partial x}{-y} = \partial t = \frac{\partial y}{x},$$

$$x \partial x = -y \partial y, 2x \partial x + 2y \partial y = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } x^2 + y^2 = c, z = \pi t + c_3 \text{ 이다.}$$

13.  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 1$  이므로 압축적이다.

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & -z \end{vmatrix} = [0, 0, 0] \text{ 이므로 비회전적이다.}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x, \frac{\partial y}{\partial t} = y, \frac{\partial z}{\partial t} = -z \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \partial t, \frac{\partial y}{y} = \partial t, \frac{\partial z}{z} = -\partial t \text{ 이고}$$

$$x = c_1 e^t, y = c_2 e^t, z = c_3 e^{-t} \text{ 이다.}$$

따라서  $\mathbf{r}(t) = [c_1 e^t, c_2 e^t, c_3 e^{-t}]$  이다.

$$14. \mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3], \mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$$

$$(a) \operatorname{curl}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \end{vmatrix} \\ = \left[ \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, -\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \\ + \left[ \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] \\ = \operatorname{curl} \mathbf{u} + \operatorname{curl} \mathbf{v}$$

$$(b) \operatorname{curl} \mathbf{v} = \left[ \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right]$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0$$

$$(c) \operatorname{curl}(f\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f v_1 & f v_2 & f v_3 \end{vmatrix} = [w_1, w_2, w_3]$$

$$w_1 = \frac{\partial(f v_3)}{\partial y} - \frac{\partial(f v_2)}{\partial z} \\ = \frac{\partial f}{\partial y} v_3 + f \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} v_2 - f \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ = f \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial y} v_3 - \frac{\partial f}{\partial z} v_2 \right)$$

$$w_2 = -\frac{\partial(f v_3)}{\partial x} + \frac{\partial(f v_1)}{\partial z} \\ = -\frac{\partial f}{\partial x} v_3 - f \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} v_1 + f \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ = f \left( -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + \left( -\frac{\partial f}{\partial x} v_3 + \frac{\partial f}{\partial z} v_1 \right)$$

$$w_3 = \frac{\partial(f v_2)}{\partial x} - \frac{\partial(f v_1)}{\partial y} \\ = \frac{\partial f}{\partial x} v_2 + f \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} v_1 - f \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ = f \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} v_2 - \frac{\partial f}{\partial y} v_1 \right)$$

$$\operatorname{curl}(f\mathbf{v}) = [w_1, w_2, w_3] = f \operatorname{curl} \mathbf{v} + \nabla f \times \mathbf{v}$$

$$(d) \operatorname{grad} f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right],$$

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] \\ = 0$$

$$(e) \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ = [u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1]$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) v_1 + \left( -\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) v_2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) v_3 + u_1 \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \\ &\quad + u_2 \left( -\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + u_3 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \\ &= (\operatorname{curl} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\operatorname{curl} \mathbf{v})\end{aligned}$$

$$\ast \operatorname{curl} \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = [1, 1, 1],$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = [0, 0, 0],$$

$$\operatorname{grad} f = [1, 1, -1], \operatorname{grad} g = [yz, xz, xy]$$

$$15. \operatorname{curl}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{curl} \mathbf{u} + \operatorname{curl} \mathbf{v} = [1, 1, 1],$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{curl} \mathbf{v} + \operatorname{curl} \mathbf{u} = [1, 1, 1]$$

$$\begin{aligned}16. \operatorname{curl}(g\mathbf{v}) &= g\operatorname{curl} \mathbf{v} + \nabla g \times \mathbf{v} \\ &= [0, 0, 0] + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ yz & xz & xy \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} \\ &= [x^2z - x^2y, xy^2 - y^2z, yz^2 - xz^2]\end{aligned}$$

$$17. \operatorname{curl}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{curl} \mathbf{u} + \operatorname{curl} \mathbf{v} = [1, 1, 1],$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{curl} \mathbf{v} + \operatorname{curl} \mathbf{u} = [1, 1, 1],$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = [0, 0, 0]$$

$$18. \operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\operatorname{curl} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\operatorname{curl} \mathbf{v}) = 2x + 2y + 2z$$

$$19. \operatorname{curl}(g\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{curl} g\mathbf{u} + \operatorname{curl} \mathbf{v}$$

$$= [2xyz - x^2y, 2xyz - y^2z, 2xyz - xz^2]$$

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}(g\mathbf{u}) &= g\operatorname{curl} \mathbf{u} + \nabla g \times \mathbf{u} \\ &= [xyz, xyz, xyz] + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ yz & xz & xy \\ z & x & y \end{vmatrix} \\ &= [xyz, xyz, xyz] + [xyz - x^2y, xyz - y^2z, xyz - xz^2] \\ &= [2xyz - x^2y, 2xyz - y^2z, 2xyz - xz^2]\end{aligned}$$

$$20. \operatorname{grad} f g = [2xyz, 2xyz, -2xyz] \text{ 이므로}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f g) = 2yz + 2xz - 2xy \text{ 이다.}$$

### Chapter 3 Review Questions and Problems

1. 벡터는 크기와 방향을 가지는 양이다.  
벡터 함수는 함수값이 벡터인 함수이다.  
벡터 장은 어떤 영역에 정의된 벡터 함수이다.  
스칼라는 크기로 결정되는 양이다.  
스칼라 함수는 함수값이 스칼라인 함수이다.  
스칼라 장은 어떤 영역에 정의된 스칼라 함수이다.

$$2. \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= [a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]\end{aligned}$$

외적의 크기는  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma$ 이고 방향은 오른 나사의 진행 방향을 가진다.

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

내적은 정사영에서, 외적은 오른 나사에 작용하는 힘으로부터, 스칼라 삼중적은 평행육면체의 부피에서 동기를 찾을 수 있다.

3.  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 가 오른 나사의 진행 방향을 주면 오른쪽으로 편향된 좌표계이고, 왼 나사의 진행 방향을 주면 왼쪽으로 편향된 좌표계이다.
4. 두 벡터 중 어느 하나가  $\mathbf{0}$ 벡터이거나 서로 수직일 때 내적이 0이다.  
두 벡터 중 어느 하나가  $\mathbf{0}$ 벡터이거나 서로 평행할 때 외적이 0이다.

$$5. \mathbf{v}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

운동하는 질점의 속도, 속력, 가속도를 계산하거나 곡선의 곡률, 곡률 반경을 계산할 때 사용한다.

6.  $\mathbf{r}'(t)$ 는 운동의 속도벡터라 하며 움직이는 물체의 순간적인 방향을 의미한다.  $|\mathbf{r}'(t)|$ 은 속력이다.  
 $\mathbf{r}''(t)$ 는 가속도벡터이며  $|\mathbf{r}''(t)|$ 은 가속력이다.
7.  $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t]$ 이면  $\mathbf{r}'(t) = [-\sin t, \cos t]$ 이므로 항상 변화하는 속도를 가지지만, 속력은  $|\mathbf{r}'(t)| = 1$ 이므로 항상 일정한다.

8. 주어진 점  $P$ 에서 주어진 벡터  $\mathbf{b}$ 의 방향으로 함수  $f$ 의 변화율을  $P$ 에서  $\mathbf{b}$ 의 방향으로 함수  $f$ 의 방향도함수라 하고 이는  $\mathbf{b}$ 와  $\operatorname{grad} f$ 의 내적으로 표현된다.

9. 함수  $f$ 의 기울기(gradient)는

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \text{로 정의된다.}$$

$\mathbf{v}$ 가 미분가능한 벡터함수이고  $v_1, v_2, v_3$ 가  $\mathbf{v}$ 의 성분일 때

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \text{이다.}$$

10.  $f\operatorname{curl} \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \mathbf{v} \times (\operatorname{curl} \mathbf{v}),$   
 $\operatorname{div}(f\mathbf{v}), \operatorname{curl}(f\mathbf{v})$ 는 의미가 있다.
11.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = -10, 3\mathbf{b} \cdot 8\mathbf{d} = [9, -3, 15] \cdot [8, -16, 64] = 1080$   
 $24\mathbf{b} \cdot \mathbf{d} = [24, -48, 192] \cdot [3, -1, 5] = 1080, \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 65$
12.  $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = [0, 0, 50], \mathbf{b} \times \mathbf{d} = [2, -19, -5],$   
 $\mathbf{d} \times \mathbf{b} = [-2, 19, 5], \mathbf{a} \times \mathbf{a} = [0, 0, 0]$
13.  $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = [-10, -30, 0], \mathbf{c} \times \mathbf{b} = [10, 30, 0]$   
 $\mathbf{c} \times \mathbf{c} = [0, 0, 0], \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 40$
14.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [35, -20, -25]$ 이므로  $5(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -1250$ 이다.  
 $5\mathbf{b} \times \mathbf{c} = [50, -150, 0]$ 이므로  $\mathbf{a} \cdot (5\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -850$ 이다.

$$(5\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 20 & 35 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ -6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1250$$

$5(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ 는 정의되지 않는다.

15.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [35, -20, -25]$  이므로

$$6(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{d} = [-1260, -1830, -300] \text{ 이다.}$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{d} = [2, -19, -5] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{a} \times 6(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = [-210, 120, -540] \text{ 이다.}$$

$2\mathbf{a} \times 3\mathbf{b} \times \mathbf{d}$ 는 정의되지 않는다.

16.  $\left(\frac{1}{|\mathbf{a}|}\right)\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{65}}\mathbf{a} = \left[\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}, 0\right]$

$$\left(\frac{1}{|\mathbf{b}|}\right)\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{b} = \left[\frac{3}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right]$$

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{5}{\sqrt{35}}, \quad \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{5}{\sqrt{65}}$$

17.  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{d} = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -125, \quad (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{d} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 125,$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{d} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 8 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -125$$

18.  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |[7, 6, 5]| = \sqrt{110}$

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = \sqrt{65} + \sqrt{35}$$

19.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [35, -20, -25], \quad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = [-35, 20, 25]$  이므로

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} = [70, -40, -50] \text{ 이다.}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = [0, 0, 50] \text{ 이므로 } (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = 0 \text{ 이다.}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{2250}$$

20.  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  이므로  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$  가 성립하는 경우는

0일 때이다.  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\gamma$  이므로  $\gamma = 0, \pi$  일 때

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  이다. 따라서  $\mathbf{u}$  와  $\mathbf{v}$  가 평행할 때

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$  이 성립한다.

항상  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  는 성립한다.

21.  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  라 하자.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{u} = [2 + u_1, 6 + u_2, 13 + u_3] = \mathbf{0} \text{ 이므로}$$

$$u_1 = -2, u_2 = -6, u_3 = -13 \text{ 이고}$$

$$\mathbf{u} = [-2, -6, -13] \text{ 이다.}$$

22.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \mathbf{v} = [1 + v_1, 8 + v_2, 5 + v_3]$  에서

$$yz - \text{평면 에 평행하므로 } 1 + v_1 = 0 \text{ 이고 } v_1 = -1 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \mathbf{v} = [-1, v_2, v_3] \text{ 이다.}$$

23.  $\cos\gamma = \frac{-10}{\sqrt{65}\sqrt{40}} = \frac{-5}{\sqrt{650}}, \gamma = 101.31^\circ\text{C}$

$$\cos\gamma = \frac{45}{\sqrt{35}\sqrt{69}} = \frac{45}{\sqrt{2415}}, \gamma = 23.69^\circ\text{C}$$

24. 평면  $-x + y + 4z = 12$  의 법선 벡터 :  $[-1, 1, 4]$

$$\text{평면 } x - y + 2z = 4 \text{ 의 법선 벡터 : } [1, -1, 2]$$

$$\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{18}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \gamma = 54.74^\circ\text{C}$$

25.  $\mathbf{d} = [6, 7, 0]$  이므로  $w = \mathbf{q} \cdot \mathbf{d} = 33$  이다.

26.  $\mathbf{v}$  의  $\mathbf{w}$  방향의 성분과  $\mathbf{w}$  의  $\mathbf{v}$  방향의 성분이 같기

위하여  $|\mathbf{v}|\cos\gamma = |\mathbf{w}|\cos\gamma$  을 만족하여야 한다. 따라서

$|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$  이거나  $\mathbf{v}$  와  $\mathbf{w}$  가 직교할 때이다.

27.  $\cos\gamma = \frac{22}{\sqrt{65}\sqrt{8}} = \frac{11}{\sqrt{130}}$  이므로  $\mathbf{v}$  의  $\mathbf{w}$  방향의

$$\text{성분은 } |\mathbf{v}|\cos\gamma = \frac{22}{\sqrt{8}} = \frac{11}{\sqrt{2}} \text{ 이다.}$$

28.  $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$  이므로  $|\mathbf{m}| = |\mathbf{r}||\mathbf{p}|\sin\gamma = 0$  이다.

즉,  $|\mathbf{r}| = 0, |\mathbf{p}| = 0$  또는  $\sin\gamma = 0$  이다. 따라서 거리나

힘이 0 일 때 또는 힘과 거리가 수직일 때

모멘트가 0 이다.

29.  $\mathbf{r} = [-3, 2, 0]$  이므로

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, -14] \text{ 이다.}$$

30.  $P: (2, 2\sqrt{3}, \pi)$  이므로  $t = \frac{\pi}{3}$  이다.

$$\mathbf{v}(t) = [-4\sin t, 4\cos t, 3],$$

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{3}\right) = [-2\sqrt{3}, 2, 3], \quad |\mathbf{v}| = 5$$

$$\mathbf{a}(t) = [-4\cos t, -4\sin t, 0], \quad \mathbf{a}\left(\frac{\pi}{3}\right) = [-2, -2\sqrt{3}, 0]$$

$$x = 4\cos t, y = 4\sin t, z = 3t \text{ 이므로}$$

$$x^2 + y^2 = 4, \quad \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t \text{ 이다. 따라서}$$

$$x^2 + y^2 = 1, z = 2\arctan \frac{y}{x} \text{ (타원기둥 위의 나선)이다.}$$

31. 사면체의 모서리를 나타내는 벡터는

$$[4, 2, 1], [1, 3, 0], [6, 8, 0] \text{ 이다.}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -10 \text{ 이므로 부피는 } \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \text{ 이다.}$$

32.  $\text{grad}f = [z, -z, x - y], \quad \text{grad}f(0, 3, 1) = [1, -1, -3],$

$$f\text{grad}f = (xz - yz)[z, -z, x - y],$$

$$f\text{grad}f(3, 4, 0) = [-3, 3, 9]$$

33.  $\text{div}\mathbf{v} = 2 - 1 = 1, \quad \text{div}\mathbf{w} = 2y + 4z$

34.  $\text{curl}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4z & 2y & x - z \end{vmatrix} = [0, 3, 0],$

$$\text{curl}\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & y^2 - x^2 & 2z^2 \end{vmatrix} = [0, 0, -2x - 2y]$$

35.  $\text{div}(\text{grad}f) = 0, \quad \nabla^2 f = 0,$

$$\nabla^2(xzf) = \nabla^2(x^2z^2 - xyz^2) = 2z^2 + 2x^2 - 2xy$$

36.  $(\text{curl}\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = (x - z)(-2x - 2y) = -16$

37.  $\text{grad}(\text{div}\mathbf{w}) = [0, 2, 4]$

38.  $\mathbf{v}(1, 1, 1) = [4, 2, 0], \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{20},$

$$\nabla f(1, 1, 1) = [1, -1, 0],$$

$$D_{\mathbf{v}}f(3, 7, 5) = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right] \cdot [1, -1, 0] = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

39.  $\mathbf{w}(1, 0, 1) = [0, -1, 2], \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{5},$

$$\nabla f(1, 0, 1) = [1, -1, 1],$$

$$D_{\mathbf{w}}f(1, 2, 0) = \left[0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cdot [1, -1, 1] = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

40.  $\mathbf{v} \cdot (\text{curl}\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = 2y(2x + 2y)(4z - 1)$



## CHAPTER 4

# 벡터적분. 적분정리

## 4.1 Line Integrals

2.  $C: \mathbf{r}(t) = [t, 4t^2] \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [16t^4, -t^2], \quad \mathbf{r}'(t) = [1, 8t]$$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (16t^4 - 8t^3) dt = \frac{6}{5}$$

3.  $C: \mathbf{r}(t) = [t, 4t] \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [16t^2, -t^2], \quad \mathbf{r}'(t) = [1, 4]$$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (16t^2 - 4t^2) dt = 4$$

4.  $C: \mathbf{r}(t) = [-t, t+2] \quad -2 \leq t \leq 0$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [-t^2 - 2t, t^4 + 4t^3 + 4t^2], \quad \mathbf{r}'(t) = [-1, 1]$$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{-2}^0 (t^4 + 4t^3 + 5t^2 + 2t) dt = -\frac{4}{15}$$

5.  $C: \mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t] \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [4\sin t \cos t, 16\sin^2 t \cos^2 t],$$

$$\mathbf{r}'(t) = [-2\sin t, 2\cos t]$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-8\sin^2 t \cos t + 32\sin^2 t \cos^3 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^2 t (3 - 4\sin^2 t) \cos t dt = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

6.  $C: \mathbf{r}(t) = [2\cos t, t, 2\sin t] \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [2\cos t - t, t - 2\sin t, 2\sin t - 2\cos t],$$

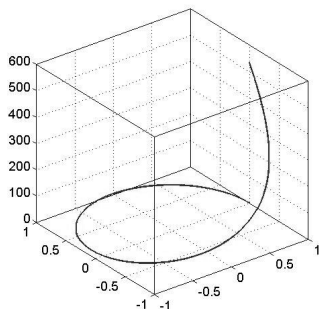
$$\mathbf{r}'(t) = [-2\sin t, 1, 2\cos t]$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (2t \sin t + t - 2\sin t - 4\cos^2 t) dt \\ &= 2\pi^2 - 8\pi \end{aligned}$$

7.  $C: \mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, e^t] \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [\cos^2 t, \sin^2 t, e^{2t}], \quad \mathbf{r}'(t) = [-\sin t, \cos t, e^t]$$

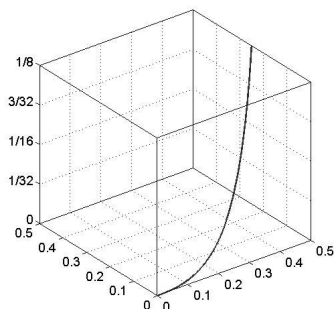
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t + e^{3t}) dt \\ &= \frac{1}{3}(e^{6t} - 1) \end{aligned}$$



8.  $C: \mathbf{r}(t) = [t, t^2, t^3] \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [e^t, \cosh t^2, \sinh t^3], \quad \mathbf{r}'(t) = [1, 2t, 3t^2]$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\frac{1}{2}} (e^t + 2t \cosh t^2 + 3t^3 \sinh t^3) dt \\ &= e^{1/2} + \sinh \frac{1}{4} + \cosh \frac{1}{8} - 2 \end{aligned}$$



9.  $C: \mathbf{r}(t) = [2t, 5t, t]$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [7t, 6t, 3t], \quad \mathbf{r}'(t) = [2, 5, 1]$$

$$0 \leq t \leq 1 \text{ 이면 } \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (47t) dt = \frac{47}{2} \text{ 이다.}$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{ 이면 } \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^1 (47t) dt = 0 \text{ 이다.}$$

10.  $C_1: \mathbf{r}(t) = [t, t, 0] \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [t, 0, 2t], \quad \mathbf{r}'(t) = [1, 1, 0]$$

$$C_2: \mathbf{r}(t) = [1, 1, t] \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [1, -t, 2], \quad \mathbf{r}'(t) = [0, 0, 1]$$

$$C_3: \mathbf{r}(t) = [1-t, 1-t, 1-t] \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [1-t, t-1, 2-2t], \quad \mathbf{r}'(t) = [-1, -1, -1]$$

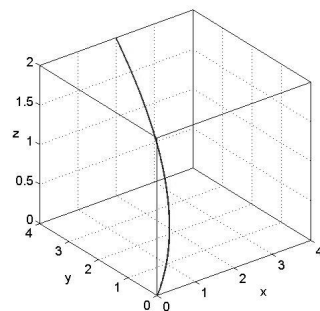
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^1 t dt + \int_0^1 2 dt + \int_0^1 (2t-2) dt = \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이다.

11.  $C: \mathbf{r}(t) = [t, t^2, t] \quad 0 \leq t \leq 2$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [e^{-t}, e^{-t^2}, e^{-t}], \quad \mathbf{r}'(t) = [1, 2t, 1]$$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (2e^{-t} + 2te^{-t^2}) dt = 3 - 2e^{-2} - e^{-4}$$



12. (a)  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [\cos t \sin t, -\sin^2 t], \quad \mathbf{r}'(t) = [-\sin t, \cos t]$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t \sin^2 t - \cos t \sin^2 t) dt = -\frac{2}{3}$$

$$t = -p \text{ 라 치환하면 } \mathbf{r}(p) = [\cos p, -\sin p]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(p)) = [-\cos p \sin p, -\sin^2 p],$$

$$\mathbf{r}'(t) = [-\sin p, -\cos p]$$



$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} (\cos p \sin^2 p + \cos p \sin^2 p) dp = -\frac{2}{3}$$

$$t = p^2 \text{ 라 } t \text{ 가 } p \text{ 로 } \mathbf{r}(p) = [\cos p^2, \sin p^2]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(p)) = [\cos p^2 \sin^2 p, -\sin^2 p^2],$$

$$\mathbf{r}'(t) = [-2p \sin p^2, 2p \cos p^2]$$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (-2p \cos p^2 \sin^2 p^2 - 2p \cos p^2 \sin^2 p^2) dp = -\frac{2}{3}$$

$$(b) \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [t^{n+1}, -t^{2n}], \mathbf{r}'(t) = [1, nt^{n-1}]$$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^{n+1} - nt^{3n-1}) dt = \frac{1-n}{3(n+2)}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{3(n+2)} = -\frac{1}{3}$$

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = [t, 0] \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) = [0, 0], \mathbf{r}_1'(t) = [1, 0]$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = [1, t] \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) = [t, -t^2], \mathbf{r}_2'(t) = [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 -t^2 dt = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$13. \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

$$\begin{aligned} \left| \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) dt \right| &= \left| \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b |\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))| |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b M |\mathbf{r}'(t)| dt = ML \end{aligned}$$

$$14. C: \mathbf{r}(t) = [3t, 4t] \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [9t^2, 4t], |\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))| = \sqrt{81t^4 + 16t^2}$$

$$\sqrt{81t^4 + 16t^2} \text{ 는 } t > 0 \text{ 에서 증가함수이므로}$$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))| = \sqrt{81t^4 + 16t^2} < \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97} \text{ 이다.}$$

$$L = 5 \text{ 이면 } |u| = \left| \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right| \leq 5\sqrt{97} \text{ 이다.}$$

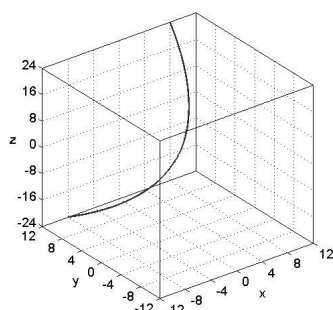
$$\begin{aligned} 15. \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) dt &= \int_0^{4\pi} [9 \sin^2 t, 4t^2, 9 \cos^2 t] dt \\ &= \left[ 18\pi, \frac{256}{3} \pi^3, 18\pi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16. \int_C f(\mathbf{r}) dt &= \int_0^1 (3t + \cosh t + 5 \sinh t) dt \\ &= \sinh 1 + 5 \cosh 1 - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

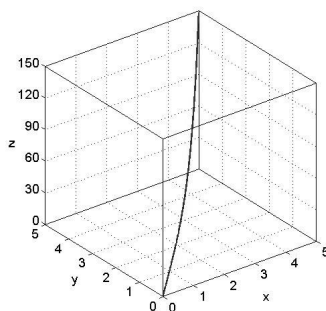
$$\begin{aligned} 17. \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) dt &= \int_0^\pi [4 \cos t + \sin t, \sin t, 4 \cos t] dt \\ &= [2, 2, 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18. \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) dt &= \int_0^{\pi/4} [\sin t, \cos t, 0] dt \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right] \end{aligned}$$

$$19. \int_C f(\mathbf{r}) dt = \int_{-2}^2 144t^4 dt = \frac{9216}{5}$$



$$\begin{aligned} 20. \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) dt &= \int_0^5 [te^t, te^t, t^4] dt \\ &= [4e^5 - 1, 4e^5 - 1, 5^4] \end{aligned}$$



## 4.2 Path Independence of Line Integrals

$$3. F_1 = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} x \cos 2y, F_2 = -2 \sin \frac{1}{2} x \sin 2y \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\cos \frac{1}{2} x \sin 2y = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ 이고 완전하다.}$$

$$f = \int \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \cos 2y dx + \phi(y) = \sin \frac{x}{2} \cos 2y + \phi(y)$$

$$\text{이므로 } \frac{\partial f}{\partial y} = -2 \sin \frac{x}{2} \sin 2y + \phi'(y) = -2 \sin \frac{x}{2} \sin 2y,$$

$$\phi(y) = c \text{ 이고 } f = \sin \frac{x}{2} \cos 2y \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} \int_{(\pi/2, \pi)}^{(\pi, 0)} \left( \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \cos 2y dx - 2 \sin \frac{x}{2} \sin 2y dy \right) \\ = \sin \frac{x}{2} \cos 2y \Big|_{(\pi/2, \pi)}^{(\pi, 0)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$4. F_1 = 2xe^{4y}, F_2 = 4x^2e^{4y} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 8xe^{4y} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ 이고 완전하다.}$$

$$f = \int 2xe^{4y} dx + \phi(y) = x^2e^{4y} + \phi(y) \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2e^{4y} + \phi'(y) = 4x^2e^{4y}, \phi(y) = c \text{ 이고}$$

$$f = x^2 e^{4y} \text{ 이다.}$$

$$\int_{(4,0)}^{(6,1)} e^{4y}(2xdx + 4x^2 dy) = x^2 e^{4y} \Big|_{(4,0)}^{(6,1)} = 36e^4 - 16$$

$$5. F_1 = ye^{xy} \sin z, F_2 = xe^{xy} \sin z, F_3 = e^{xy} \cos z \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = xe^{xy} \cos z = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = ye^{xy} \cos z = \frac{\partial F_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = (1+xy)e^{xy} \sin z = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ 이다. 따라서 완전하다.}$$

$$f = \int ye^{xy} \sin z dx + \phi(y, z) = e^{xy} \sin z + \phi(y, z)$$

$$\text{이므로 } \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} \sin z + \phi_y = xe^{xy} \sin z,$$

$$\phi(y, z) = \psi(z) \text{ 이고 } f = e^{xy} \sin z + \psi(z) \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xy} \cos z + \psi' = e^{xy} \cos z, \quad \psi(z) = c \text{ 이고}$$

$$f = e^{xy} \sin z \text{ 이다.}$$

$$\int_{(0,0,\pi)}^{(2,1/2,\pi/2)} e^{xy}(y \sin z dx + x \sin z dy + \cos z dz) \\ = e^{xy} \sin z \Big|_{(0,0,\pi)}^{(2,1/2,\pi/2)} = e$$

$$6. F_1 = xe^{x^2+y^2+z^2}, F_2 = ye^{x^2+y^2+z^2}, F_3 = ze^{x^2+y^2+z^2}$$

$$\text{이므로 } \frac{\partial F_3}{\partial y} = 2yze^{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 2xze^{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xye^{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ 이다. 따라서 완전하다.}$$

$$f = \int xe^{x^2+y^2+z^2} dx + \phi(y, z) = \frac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2} + \phi(y, z)$$

$$\text{이므로 } \frac{\partial f}{\partial y} = ye^{x^2+y^2+z^2} + \phi_y = ye^{x^2+y^2+z^2},$$

$$\phi(y, z) = \psi(z) \text{ 이고 } f = \frac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2} + \psi(z) \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ze^{x^2+y^2+z^2} + \psi' = ze^{x^2+y^2+z^2}, \quad \psi(z) = c \text{ 이고}$$

$$f = \frac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2} \text{ 이다.}$$

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} e^{x^2+y^2+z^2}(xdx + ydy + zdz) = \frac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2} \Big|_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \\ = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

$$7. F_1 = yz \sinh xz, F_2 = \cosh xz, F_3 = xy \sinh xz \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = x \sinh xz = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = y \sinh xz + xyz \cosh xz = \frac{\partial F_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = z \sinh xz = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ 이다. 따라서 완전하다.}$$

$$f = \int yz \sinh xz dx + \phi(y, z) = y \cosh xz + \phi(y, z)$$

$$\text{이므로 } \frac{\partial f}{\partial y} = \cosh xz + \phi_y = \cosh xz,$$

$$\phi(y, z) = \psi(z) \text{ 이고 } f = y \cosh xz + \psi(z) \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \sinh xz + \psi' = xy \sinh xz, \quad \psi(z) = c \text{ 이고}$$

$$f = \frac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2} \text{ 이다.}$$

$$\int_{(0,2,3)}^{(1,1,1)} (yz \sinh xz dx + \cosh xz dy + xy \sinh xz dz) \\ = y \cosh xz \Big|_{(0,2,3)}^{(1,1,1)} = \cosh 1 - 2$$

$$8. F_1 = \cos yz, F_2 = -xz \sin yz, F_3 = -xy \sin yz \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = -x \sin yz - xyz \cos yz = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -y \sin yz = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -z \sin yz = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 완전하다.}$$

$$f = \int \cos yz dx + \phi(y, z) = x \cos yz + \phi(y, z) \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xz \sin yz + \phi_y = -xz \sin yz, \quad \phi(y, z) = \psi(z) \text{ 이고}$$

$$f = x \cos yz + \psi(z) \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy \sin yz + \psi' = -xy \sin yz, \quad \psi(z) = c \text{ 이고}$$

$$f = x \cos yz \text{ 이다.}$$

$$\int_{(5,3,\pi)}^{(3,\pi,3)} (\cos yz dx - xz \sin yz dy - xy \sin yz dz) \\ = x \cos yz \Big|_{(5,3,\pi)}^{(3,\pi,3)} = 2$$

$$9. F_1 = e^x \cosh y, F_2 = e^x \sinh y + e^z \cosh y, F_3 = e^z \sinh y$$

$$\text{이므로 } \frac{\partial F_3}{\partial y} = e^z \cosh y = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x \sinh y = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ 이다. 따라서 완전하다.}$$

$$f = \int e^x \cosh y dx + \phi(y, z) = e^x \cosh y + \phi(y, z) \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \sinh y + \phi_y = e^x \sinh y + e^z \cosh y,$$

$$\phi(y, z) = e^z \sinh y + \psi(z) \text{ 이고}$$

$$f = e^x \cosh y + e^z \sinh y + \psi(z) \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^z \sinh y + \psi' = e^z \sinh y, \quad \psi(z) = c \text{ 이고}$$

$$f = e^x \cosh y + e^z \sinh y \text{ 이다.}$$

$$F(x, y, z) \\ = e^x \cosh y dx + (e^x \sinh y + e^z \cosh y) dy + e^z \sinh y dz$$

라 하면

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)} F(x, y, z) = e^x \cosh y + e^z \sinh y \Big|_{(0,1,0)}^{(1,0,1)} \\ = e - \cosh 1 - \sinh 1 = 0$$

$$10. (a) F_1 = x^2 y, F_2 = 2xy^2 \text{ 이므로 } \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y^2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = x^2$$

$$\text{이다. } \frac{\partial F_2}{\partial x} \neq \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ 이므로 } xy \text{ 평면에서 경로에}$$

의존한다.

$$(b) C_1 : \mathbf{r}_1(t) = [t, bt] \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2 : \mathbf{r}_2(t) = [1, t + b(1-t)] \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{C_1} (x^2 y dx + 2xy^2 dy) + \int_{C_2} (x^2 y dx + 2xy^2 dy) \\
 &= \int_0^1 (bt^3 + 2b^3 t^3) dt + \int_0^1 2(t+b-bt)^2 (1-b) dt \\
 &= \frac{8+3b-2b^3}{12} \\
 h(b) &= \frac{8+3b-2b^3}{12} \text{ 라 하면 } h'(b) = \frac{3-6b^2}{12} = \frac{1-2b^2}{4}.
 \end{aligned}$$

$b$	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$h'$		+		-	
$h$	$\frac{2}{3}$		$\frac{8+\sqrt{2}}{12}$		$\frac{3}{4}$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 일 때 최대값 } I = \frac{8+\sqrt{2}}{12}$$

$$b = 0 \text{ 일 때 최소값 } I = \frac{2}{3}$$

$$(c) \quad C_3 : \mathbf{r}_3(t) = [ct, t] \quad 0 \leq t \leq 1$$


$$C_4 : \mathbf{r}_4(t) = [t+c(1-t), 1] \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{C_3} (x^2 y dx + 2xy^2 dy) + \int_{C_4} (x^2 y dx + 2xy^2 dy) \\
 &= \int_0^1 (c^2 t^3 + 2ct^3) dt + \int_0^1 (t+c-ct)^2 (1-c) dt \\
 &= \frac{4+6c-c^3}{12}
 \end{aligned}$$

$$c=1 \text{ 일 때 } I = \frac{3}{4} \text{ 이다. (b)에서 } b=1 \text{ 일 때 } I = \frac{3}{4}$$

이므로 같은 값을 갖는다.

$$g(c) = \frac{4+6c-c^3}{12} \text{ 라 하면 } g'(c) = \frac{6-3c^2}{12} = \frac{2-c^2}{4}.$$

$c$	0		1
$g'$		+	
$g$	$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$

$$c=1 \text{ 일 때 최대값 } I = \frac{3}{4}$$

$$11. \quad \text{grad} \left( \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \right) = \left[ \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right] = \mathbf{F}$$

$$13. \quad F_1 = 2xe^{x^2} \cos 2y, \quad F_2 = -2e^{x^2} \sin 2y, \quad F_3 = 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -4xe^{x^2} \sin 2y = \frac{\partial F_1}{\partial y} \text{ 이다.}$$

따라서 적분경로에 무관하다.

$$f = \int 2xe^{x^2} \cos 2y dx + \phi(y, z) = e^{x^2} \cos 2y + \phi(y, z) \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{x^2} \sin 2y + \phi_y = -2e^{x^2} \sin 2y, \quad \phi(y, z) = \psi(z) \text{ 이고}$$

$$f = e^{x^2} \cos 2y + \psi(z) \text{ 이다. } \frac{\partial f}{\partial z} = \psi' = 0, \quad \psi(z) = c \text{ 이고}$$

$$f = e^{x^2} \cos 2y \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} 2e^{x^2} (x \cos 2y dx - \sin 2y dz) &= e^{x^2} \cos 2y \Big|_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} \\
 &= e^{a^2} \cos 2b - 1
 \end{aligned}$$

$$14. \quad F_1 = z \sinh xy, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -x \sinh xy \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = -x^2 \cosh xy, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial z} \text{ 이므로 적분경로에 의존한다.}$$

$$15. \quad F_1 = x^2 y, \quad F_2 = -4xy^2, \quad F_3 = 8z^2 x \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = 8z^2 \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} \neq \frac{\partial F_3}{\partial x} \text{ 이므로 적분경로에 의존한다.}$$

$$16. \quad F_1 = e^y, \quad F_2 = xe^y - e^z, \quad F_3 = -ye^z \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = -e^z = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^y = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

이다. 따라서 적분경로에 무관하다.

$$f = \int e^y dx + \phi(y, z) = xe^y + \phi(y, z) \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + \phi_y = xe^y - e^z, \quad \phi(y, z) = -ye^z + \psi(z) \text{ 이고}$$

$$f = xe^y - ye^z + \psi(z) \text{ 이다. } \frac{\partial f}{\partial z} = -ye^z + \psi' = -ye^z,$$

$$\psi(z) = c \text{ 이고 } f = xe^y - ye^z \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} (e^y dx + (xe^y - e^z) dy - ye^z dz) &= xe^y - ye^z \Big|_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} \\
 &= ae^b - be^c
 \end{aligned}$$

$$17. \quad F_1 = 4y, \quad F_2 = z, \quad F_3 = y - 2z \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 4, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x} \text{ 이므로 적분경로에 의존한다.}$$

$$18. \quad F_1 = yz \cos xy, \quad F_2 = xz \cos xy, \quad F_3 = -2 \sin xy \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = -2x \cos xy, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = x \cos xy \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial z} \text{ 이므로 적분경로에 의존한다.}$$

$$19. \quad F_1 = 2x \cos(x^2 + 2y^2 + z^2), \quad F_2 = 4y \cos(x^2 + 2y^2 + z^2),$$

$$F_3 = 2z \cos(x^2 + 2y^2 + z^2) \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = -8yz \sin(x^2 + 2y^2 + z^2) = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -4xz \sin(x^2 + 2y^2 + z^2) = \frac{\partial F_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -8xy \sin(x^2 + 2y^2 + z^2) = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

이다. 따라서 적분경로에 무관하다.

$$f = \sin(x^2 + 2y^2 + z^2) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} [\cos(x^2+2y^2+z^2)](2xdx+4ydy+2zdz) \\ = \sin(x^2+2y^2+z^2) \Big|_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} = \sin(a^2+2b^2+c^2) \end{aligned}$$

### 4.3 Calculus Review : Double Integrals

1.  $f(x, y) = 6xy^2$  이라 하고 영역  $R$ 을  $[1, 3] \times [0, 4]$  라 하자.

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_0^4 \int_1^3 6xy^2 dx dy = \int_0^4 24y^2 dy = 512$$

$R$ 의 면적  $A = 8$  이므로  $f(x_0, y_0) = 6x_0y_0^2 = 64$  인 점  $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$  이  $R$ 에 존재한다.

2.  $\int_0^2 \int_x^{2x} (x+y)^2 dy dx = \int_0^2 \frac{19}{3} x^3 dx = \frac{76}{3}$
3.  $\int_0^3 \int_{-y}^y (x^2+y^2) dx dy = \int_0^3 \frac{8}{3} y^3 dy = 54$
4.  $\begin{aligned} \int_0^3 \int_{-y}^y (x^2+y^2) dx dy \\ = \int_{-3}^0 \int_{-x}^3 (x^2+y^2) dy dx + \int_0^3 \int_x^3 (x^2+y^2) dy dx \\ = \int_{-3}^0 \left( \frac{4}{3} x^3 + 3x^2 + 9 \right) dx + \int_0^3 \left( -\frac{4}{3} x^3 + 3x^2 + 9 \right) dx \\ = 27 + 27 = 54 \end{aligned}$
5.  $\int_0^1 \int_{x^2}^x (1-2xy) dy dx = \int_0^1 (x^5 - x^3 - x^2 + x) dx = \frac{1}{12}$
6.  $\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^y \sinh(x+y) dx dy &= \int_0^2 (\cosh 2y - \cosh y) dy \\ &= \frac{1}{2} \sinh 4 - \sinh 2 \end{aligned}$
7.  $\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^y \sinh(x+y) dx dy &= \int_0^2 \int_x^2 \sinh(x+y) dy dx \\ &= \int_0^2 (\cosh(x+2) - \cosh 2x) dx = \frac{1}{2} \sinh 4 - \sinh 2 \end{aligned}$
8.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos y} x^2 \sin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} \cos^3 y \sin y dy = \frac{1}{16}$
9.  $\int_0^2 \int_0^3 (4x^2 + 9y^2) dx dy = \int_0^2 (36 + 27y^2) dy = 144$
10.  $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1-x^2) dy dx = \int_0^1 (1-2x^2+x^4) dx = \frac{8}{15}$
11. 극좌표를 이용하는 것이 편리하다.

$x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  이고  $z = 1 - r^2$ ,  $dx dy = r dr d\theta$  이다.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

12.  $M = \frac{1}{2}bh$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2}{bh} \int_0^h \int_{\frac{b}{2h}y}^{-\frac{b}{2h}y+b} x dx dy \\ &= \frac{2}{bh} \int_0^h \frac{1}{2} \left( -\frac{b^2}{h} y + b^2 \right) dy = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{2}{bh} \int_0^h \int_{\frac{b}{2h}y}^{-\frac{b}{2h}y+b} y dx dy \\ &= \frac{2}{bh} \int_0^h \left( -\frac{b}{h} y^2 + by \right) dy = \frac{h}{3} \end{aligned}$$

13.  $M = \frac{1}{2}bh$

$$\bar{x} = \frac{2}{bh} \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} x dy dx = \frac{2}{bh} \int_0^b \frac{h}{b} x^2 dx = \frac{2}{3}b$$

$$\bar{y} = \frac{2}{bh} \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} y dy dx = \frac{2}{bh} \int_0^b \frac{h^2}{2b^2} x^2 dx = \frac{h}{3}$$

14.  $M = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2)$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cos \theta dr d\theta \\ &= \frac{2}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^\pi \frac{1}{3} (r_2^3 - r_1^3) \cos \theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{2}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{2}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_0^\pi \frac{1}{3} (r_2^3 - r_1^3) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{3} = \frac{4(r_2^2 + r_2r_1 + r_1^2)}{3\pi(r_2 + r_1)} \end{aligned}$$

15.  $M = \frac{r^2\pi}{2}$

$$\bar{x} = \frac{2}{r^2\pi} \int_0^\pi \int_0^r r^2 \cos \theta dr d\theta = \frac{2}{r^2\pi} \int_0^\pi \frac{r^3}{3} \cos \theta d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{2}{r^2\pi} \int_0^\pi \int_0^r r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{2}{r^2\pi} \int_0^\pi \frac{r^3}{3} \sin \theta d\theta = \frac{4r}{3\pi} \end{aligned}$$

16. 반지름을  $r$ 이라 하면  $M = \frac{r^2\pi}{4}$  이다.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{4}{r^2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^r r^2 \cos \theta dr d\theta \\ &= \frac{4}{r^2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3} \cos \theta d\theta = \frac{4r}{3\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{4}{r^2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^r r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{4}{r^2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3} \sin \theta d\theta = \frac{4r}{3\pi} \end{aligned}$$

17.  $I_x = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} y^2 dy dx = \int_0^b \frac{h^3}{3b^3} x^3 dx = \frac{bh^3}{12}$

$$I_y = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} x^2 dy dx = \int_0^b \frac{h}{b} x^3 dx = \frac{b^3h}{4}$$

$$I_0 = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{4}$$

$$\begin{aligned}
18. \quad I_x &= \iint_R y^2 dx dy = \int_0^h \int_{\frac{b}{2h}y}^{-\frac{b}{2h}y+b} y^2 dx dy \\
&= \int_0^h \left( -\frac{b}{h} y^3 + b y^2 \right) dy = \frac{b h^3}{12} \\
I_y &= \iint_R x^2 dx dy = \int_0^h \int_{\frac{b}{2h}y}^{-\frac{b}{2h}y+b} x^2 dx dy \\
&= \int_0^h \frac{1}{3} \left( -\frac{b^3}{4h^3} y^3 + \frac{3b^3}{4h^2} y^2 - \frac{3b^3}{2h} y + b^3 \right) dy = \frac{7b^3 h}{48} \\
I_0 &= \frac{b h^3}{12} + \frac{7b^3 h}{48} \\
19. \quad I_x &= \iint_R y^2 dx dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\frac{a-b}{2h}y - \frac{a+b}{4}}^{\frac{b-a}{2h}y + \frac{a+b}{4}} y^2 dx dy \\
&= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{b-a}{h} y^3 + \frac{a+b}{2} y^2 \right) dy = \frac{(a+b)h^3}{24}
\end{aligned}$$

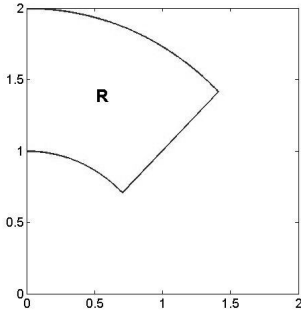
$$\begin{aligned}
I_y &= \iint_R x^2 dx dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\frac{a-b}{2h}y - \frac{a+b}{4}}^{\frac{b-a}{2h}y + \frac{a+b}{4}} x^2 dx dy \\
&= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{2}{3} \left( -\frac{a-b}{2h} y + \frac{a+b}{4} \right)^3 dy = \frac{(a^4 - b^4)h}{48(a-b)} \\
I_0 &= \frac{(a+b)h^3}{24} + \frac{(a^4 - b^4)h}{48(a-b)} \\
20. \quad I_x &= \iint_R y^2 dx dy = \int_0^h \int_{\frac{a-b}{2h}y - \frac{a}{2}}^{\frac{b-a}{2h}y + \frac{a}{2}} y^2 dx dy \\
&= \int_0^h \left( \frac{b-a}{h} y^3 + a y^2 \right) dy = \frac{(a+3b)h^3}{12} \\
I_y &= \iint_R x^2 dx dy = \int_0^h \int_{\frac{a-b}{2h}y - \frac{a}{2}}^{\frac{b-a}{2h}y + \frac{a}{2}} x^2 dx dy \\
&= \int_0^h \frac{2}{3} \left( -\frac{a-b}{2h} y + \frac{a}{2} \right)^3 dy = \frac{(a^4 - b^4)h}{48(a-b)} \\
I_0 &= \frac{(a+3b)h^3}{12} + \frac{(a^4 - b^4)h}{48(a-b)}
\end{aligned}$$

#### 4.4 Green's Theorem in the Plane

$$\begin{aligned}
1. \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (y dx - x dy) \\
&= \iint_R (-1 - 1) dx dy = -2 \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \\
2. \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (6y^2 dx + (2x - 2y^4) dy) \\
&= \iint_R (2 - 12y) dx dy = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (2 - 12y) dx dy \\
&= \int_{-2}^2 (8 - 48y) dy = 32 \\
3. \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (x^2 e^y dx + y^2 e^x dy) \\
&= \iint_R (y^2 e^x - x^2 e^y) dx dy = \int_0^3 \int_0^2 (y^2 e^x - x^2 e^y) dx dy \\
&= \int_0^3 \left( y^2 e^2 - \frac{8}{3} e^y - y^2 \right) dy = 9e^2 - \frac{8}{3} e^3 - \frac{19}{3} \\
4. \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (x \cosh 2y dx + 2x^2 \sinh 2y dy) \\
&= \iint_R (4x \sinh 2y - 2x \sinh 2y) dx dy \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^x 2x \sinh 2y dy dx \\
&= \int_0^1 (x \cosh 2x - x \cosh 2x^2) dx \\
&= \frac{1}{4} \sinh 2 - \frac{1}{4} \cosh 2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{e^{-2}}{4} \\
5. \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [(x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy] \\
&= \iint_R (2x - 2y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_1^{2-x^2} (2x - 2y) dy dx \\
&= \int_{-1}^1 (-x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 3) dx = -\frac{56}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (\cosh y dx - \sinh x dy) \\
&= \iint_R (-\cosh x - \sinh y) dx dy \\
&= \int_1^3 \int_x^{3x} (-\cosh x - \sinh y) dy dx \\
&= \int_1^3 (-2x \cosh x - \cosh 3x - \cosh x) dx \\
&= 3 \sinh 1 - 2 \cosh 1 - \frac{20}{3} \sinh 3 + 2 \cosh 3 - \frac{1}{3} \sinh 9 \\
7. \quad F_1 &= 3x^2 \cos^2(xy) - 2x^3 y \cos(xy) \sin(xy) \\
&= 3x^2 \cos^2(xy) - x^3 y \sin(2xy), \\
F_2 &= -2x^4 \cos(xy) \sin(xy) = -x^4 \sin(2xy) \circledast \text{미분} \\
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= -8x^3 \cos(xy) \sin(xy) - 2x^4 y \cos(2xy) = \frac{\partial F_2}{\partial x} \\
\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (F_1 dx + F_2 dy) \\
&= \iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 0 \\
8. \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (-e^{-x} \cos y dx - e^{-x} \sin y dy) \\
&= \iint_R (e^{-x} \sin y - e^{-x} \sin y) dx dy = 0 \\
9. \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [e^y/x dx + (e^y \ln x + 2x) dy] \\
&= \iint_R \left( \frac{e^y}{x} + 2 - \frac{e^y}{x} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{1+x^4}^2 2 dy dx \\
&= \int_{-1}^1 (4 - 2 - 2x^4) dx = \frac{16}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \left( x^2 y^2 dx - \frac{x}{y^2} dy \right) \\
&= \iint_R \left( -\frac{1}{y^2} - 2x^2 y \right) dx dy \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \left( -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} - 2r^3 \cos^2 \theta \sin \theta \right) r dr d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( -\csc^2 \theta \ln 2 - \frac{62}{5} \cos^2 \theta \sin \theta \right) d\theta \\
&= -\ln 2 - \frac{31}{15\sqrt{2}} = -2.1545
\end{aligned}$$



11. 원  $x^2 + y^2 = r^2$  의 면적은  $\pi r^2$  이다.  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  인 경우  $x' = -r \sin \theta$ ,  $y' = r \cos \theta$  이므로 식 (4)로부터

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi = \pi r^2
\end{aligned}$$

인 잘 알려진 결과를 얻는다.

12.  $\mathbf{F} = [F_2, -F_1]$  이라 하자.  $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$  이다.

$\mathbf{n} = [y', -x']$  이므로

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds = (F_2 y' + F_1 x') ds = F_2 dy + F_1 dx \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned}
\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds &= \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) \\
&= \iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy.
\end{aligned}$$

$\mathbf{F} = [F_1, F_2]$  라 하자.

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \left[ 0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
\iint_R (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dx dy &= \iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\
&= \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds.
\end{aligned}$$

$\operatorname{div} \mathbf{F} = 4$  이므로

$$\iint_R (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r dr d\theta = \int_0^{2\pi} 8d\theta = 16\pi.$$

$x^2 + y^2 = 4$  이므로  $\mathbf{r}(s) = [2\cos As, 2\sin As]$  이다.

$\mathbf{r}'$  이 단위 접선 vector 이므로

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{(-2A \sin As)^2 + (2A \cos As)^2} = 2A = 1 \text{ 이다.}$$

$$A = \frac{1}{2}, \mathbf{r}(s) = \left[ 2\cos \frac{s}{2}, 2\sin \frac{s}{2} \right] \text{ 이다.}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left[ 14\cos \frac{s}{2}, -6\sin \frac{s}{2} \right], \mathbf{n} = \left[ \cos \frac{s}{2}, \sin \frac{s}{2} \right],$$

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_0^{4\pi} \left( 14\cos^2 \frac{s}{2} - 6\sin^2 \frac{s}{2} \right) ds = 16\pi$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 7x & -3y & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 0] \text{ 이므로}$$

$$\iint_R (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dx dy = 0 \text{ 이다.}$$

$$\mathbf{r}' = \left[ -\sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2} \right] \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds &= \int_0^{4\pi} \left( -14\cos \frac{s}{2} \sin \frac{s}{2} - 6\sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2} \right) ds = 0 \\
&\text{이다.}
\end{aligned}$$

13.  $w_x = \sinh x$ ,  $w_{xx} = \cosh x$  이고  $w_y = 0$ ,  $w_{yy} = 0$  이므로

$$\nabla^2 w = \cosh x \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\partial w}{\partial n} ds &= \iint_R \cosh x dx dy = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^2 \cosh x dy dx \\
&= \int_0^4 \left( 2\cosh x - \frac{x}{2} \cosh x \right) dx = \frac{1}{2} \cosh 4 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

14.  $w_x = 2xy + y^2$ ,  $w_{xx} = 2y$ ,  $w_y = x^2 + 2xy$ ,  $w_{yy} = 2x$

$$\text{이므로 } \nabla^2 w = 2x + 2y \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\partial w}{\partial n} ds &= \iint_R (2x + 2y) dx dy \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (2r \cos \theta + 2r \sin \theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

15.  $w_x = e^x \cos y + y^3$ ,  $w_{xx} = e^x \cos y$  이고

$$w_y = -e^x \sin y + 3xy^2, w_{yy} = -e^x \cos y + 6xy \text{ 이므로}$$

$$\nabla^2 w = 6xy \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\partial w}{\partial n} ds &= \iint_R 6xy dx dy = \int_0^3 \int_1^{10-x^2} 6xy dy dx \\
&= \int_0^3 (3x^5 - 60x^3 + 297x) dx = 486
\end{aligned}$$

16.  $w_x = 2x$ ,  $w_{xx} = 2$  이고  $w_y = 2y$ ,  $w_{yy} = 2$  이므로

$$\nabla^2 w = 4 \text{ 이다. } \oint_C \frac{\partial w}{\partial n} ds = \iint_R 4 dx dy = 16\pi$$

17.  $w_x = 3x^2$ ,  $w_{xx} = 6x$ ,  $w_y = -3y^2$ ,  $w_{yy} = -6y$  이므로

$$\nabla^2 w = 6x - 6y \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\partial w}{\partial n} ds &= \iint_R (6x - 6y) dx dy \\
&= \int_{-2}^2 \int_0^x (6x - 6y) dy dx \\
&= \int_{-2}^2 (6x^3 - 3x^4) dx = -\frac{192}{5}
\end{aligned}$$

18.  $F_1 = -w w_y$ ,  $F_2 = w w_x$  라 하자.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= (w_x)^2 + w w_{xx} + (w_y)^2 + w w_{yy} \\
&= w \nabla^2 w + (w_x)^2 + (w_y)^2 = (w_x)^2 + (w_y)^2
\end{aligned}$$

Green 정리에 의하여

$$\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_R [(w_x)^2 + (w_y)^2] dx dy \text{ 이다.}$$

$$F_1 dx + F_2 dy = -w w_y dx + w w_x dy = w(-w_y x' + w_x y') ds \\ = w[\nabla w \cdot (y' \mathbf{i} - x' \mathbf{j})] ds = w[\nabla w \cdot \mathbf{n}] ds = w \frac{\partial w}{\partial n} ds$$

$$\text{이므로 } \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \oint_C w \frac{\partial w}{\partial n} ds \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \iint_R [(w_x)^2 + (w_y)^2] dx dy = \oint_C w \frac{\partial w}{\partial n} ds \text{ 이다.}$$

19.  $w_x = e^x \sin y$ ,  $w_{xx} = e^x \sin y$  이고

$$w_y = e^x \cos y$$
,  $w_{yy} = -e^x \sin y$  이므로  $\nabla^2 w = 0$  이다.

$$\oint_C w \frac{\partial w}{\partial n} ds = \iint_R [(e^x \sin y)^2 + (e^x \cos y)^2] dx dy \\ = \iint_R e^{2x} dx dy = \int_0^5 \int_0^2 e^{2x} dx dy \\ = \int_0^5 \left( \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} \right) dy = \frac{5}{2} e^4 - \frac{5}{2}$$

20.  $w_x = 2x$ ,  $w_{xx} = 2$  이고  $w_y = 2y$ ,  $w_{yy} = 2$  이므로  $\nabla^2 w = 4$  이다.

$$\oint_C w \frac{\partial w}{\partial n} ds = \iint_R [(2x)^2 + (2y)^2] dx dy \\ = \iint_R 4(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} 4(x^2 + y^2) dy dx \\ = \int_0^1 (-5x^3 + 7x^2 - 3x + 1) dx = \frac{7}{12}$$

## 4.5 Surfaces for Surface Integrals

1.  $z=0$  ( $xy$  평면)

$u = \text{const}$  이면  $x$  축과 평행한 직선,

$v = \text{const}$  이면  $y$  축과 평행한 직선

$$\mathbf{r}_u = [1, 0], \mathbf{r}_v = [0, 1] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 1] = \mathbf{k} \text{ 이다.}$$

2.  $z=0$  ( $xy$  평면)

$u = \text{const}$  이면  $x^2 + y^2 = u^2$  (원)

$v = \text{const}$  이면  $y = x \tan v$  (직선)

$$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, u] = u \mathbf{k} \text{ 이다.}$$

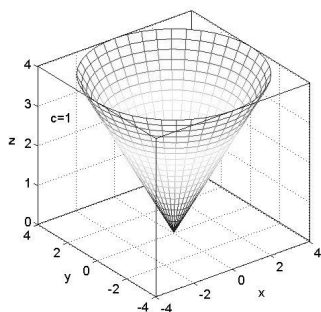
3.  $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{c^2}$

$u = \text{const}$  이면  $x^2 + y^2 = u^2$  (원)

$v = \text{const}$  이면 직선

$$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, c], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0],$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & c \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = [-cu \cos v, -cu \sin v, u].$$



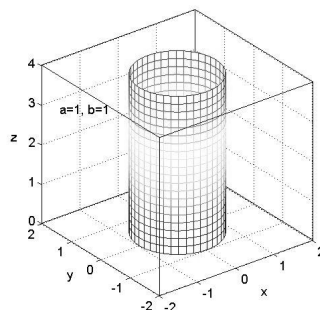
4.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$u = \text{const}$  이면  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (타원)

$v = \text{const}$  이면  $z$  축과 평행한 직선

$$\mathbf{r}_u = [0, 0, 1], \mathbf{r}_v = [-a \sin v, b \cos v, 0] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -a \sin v & b \cos v & 0 \end{vmatrix} = [-b \cos v, -a \sin v, 0] \text{ 이다.}$$



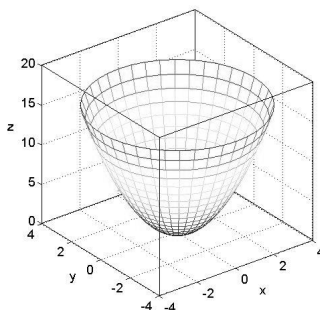
5.  $x^2 + y^2 = z$

$u = \text{const}$  이면  $x^2 + y^2 = u^2$  (원)

$v = \text{const}$  이면 포물선

$$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 2u], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = [-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u].$$



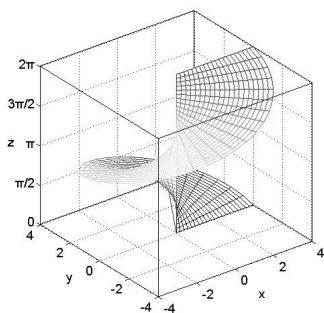
6.  $z = \arctan \frac{y}{x}$

$u = \text{const}$  이면  $z = \arctan \frac{y}{x}$  (나선)

$v = \text{const}$  이면  $y = x \tan v$  (직선)

$$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 1],$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = [\sin v, -\cos v, u].$$



$$7. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

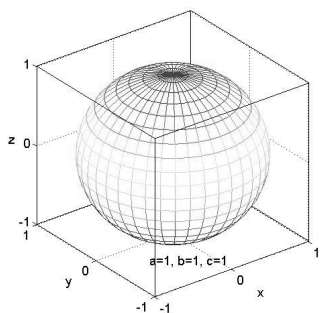
$u = \text{const}$  이면 타원

$$v = \text{const} \text{ 이면 } \frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} + \frac{y^2}{b^2 \cos^2 v} = 1 \text{ (타원)}$$

$$\mathbf{r}_u = [-a \cos v \sin u, b \cos v \cos u, 0],$$

$$\mathbf{r}_v = [-a \sin v \cos u, -b \sin v \sin u, c \cos v],$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \cos v \sin u & b \cos v \cos u & 0 \\ -a \sin v \cos u & -b \sin v \sin u & c \cos v \end{vmatrix} \\ = [bc \cos^2 v \cos u, ac \cos^2 v \sin u, ab \sin v \cos v].$$



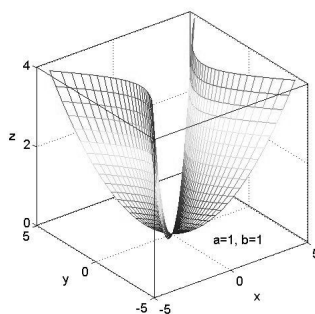
$$8. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

$$u = \text{const} \text{ 이면 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = u^2 \text{ (쌍곡선)}$$

$v = \text{const}$  이면 포물선

$$\mathbf{r}_u = [a \cosh v, b \sinh v, 2u], \mathbf{r}_v = [au \sinh v, bu \cosh v, 0],$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cosh v & b \sinh v & 2u \\ au \sinh v & bu \cosh v & 0 \end{vmatrix} \\ = [-2u^2 \cosh v, 8u^2 \sinh v, 4u]$$



10.  $\mathbf{r}_u$  와  $\mathbf{r}_v$  는 매개변수 곡선  $v = \text{const}$  와  $u = \text{const}$  의 접선벡터이다. 따라서 두 곡선이 직교할 필요충분조건은  $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0$  이다.

11.  $x^2 + y^2 = z$  이므로  $S: \mathbf{r}(\tilde{u}, \tilde{v}) = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2]$  이다.  
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 2\tilde{u}], \mathbf{r}_v = [0, 1, 2\tilde{v}]$  이므로

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2\tilde{u} \\ 0 & 1 & 2\tilde{v} \end{vmatrix} = [-2\tilde{u}, -2\tilde{v}, 1] \text{ 이고 } \tilde{\mathbf{N}}(0, 0) \neq \mathbf{0} \text{ 이다.}$$

12. 문제 1 :  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$  인 점이 존재하지 않는다.

문제 2 : 원점(표현식 선택)

문제 3 : 원점(곡면의 모양)

문제 4 :  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$  인 점이 존재하지 않는다.

문제 5 : 원점(표현식 선택)

문제 6 :  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$  인 점이 존재하지 않는다.

문제 7 :  $(0, 0, \pm c)$  (곡면의 모양)

문제 8 : 원점(표현식 선택)

13.  $x = u, y = v$  라 하면  $z = f(u, v)$  이고

$$\mathbf{r}(u, v) = [u, v, f(u, v)] \text{ 이다.}$$

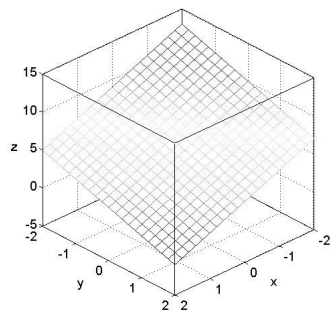
$$\mathbf{r}_u = [1, 0, f_u], \mathbf{r}_v = [0, 1, f_v] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = [-f_u, -f_v, 1] \text{ 이다.}$$

14.  $S: \mathbf{r}(u, v) = \left[ u, v, 6 - 2u - \frac{3}{2}v \right]$

$$\mathbf{r}_u = [1, 0, -2], \mathbf{r}_v = \left[ 0, 1, -\frac{3}{2} \right] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{vmatrix} = \left[ 2, \frac{3}{2}, 1 \right] \text{ 이다.}$$

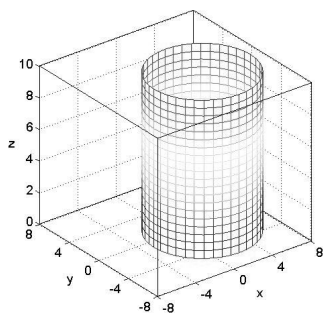


15.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [5 \cos u + 2, 5 \sin u - 1, v]$



$$\mathbf{r}_u = [-5 \sin u, 5 \cos u, 0], \mathbf{r}_v = [0, 0, 1],$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 \sin u & 5 \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [5 \cos u, 5 \sin u, 0]$$

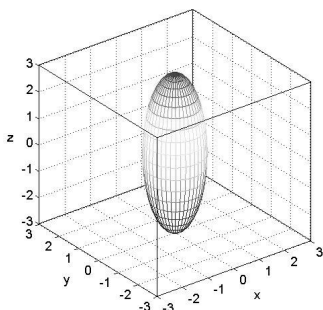


$$16. S: \mathbf{r}(u, v) = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, 3 \sin v]$$

$$\mathbf{r}_u = [-\cos v \sin u, \cos v \cos u, 0],$$

$$\mathbf{r}_v = [-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, 3 \cos v],$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\cos v \sin u & \cos v \cos u & 0 \\ -\sin v \cos u & -\sin v \sin u & 3 \cos v \end{vmatrix} \\ = [3 \cos^2 v \cos u, 3 \cos^2 v \sin u, 6 \sin v \cos v]$$



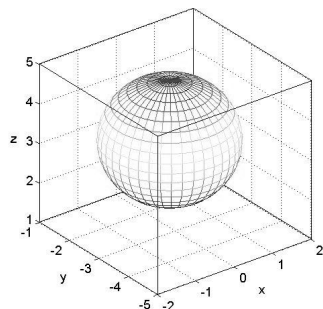
$$17. S: \mathbf{r}(u, v) = [a \cos u \cos v, a \sin u \cos v - 2.8, a \sin v + 3.2]$$

$$a = 1.5$$

$$\mathbf{r}_u = [-a \sin u \cos v, a \cos u \cos v, 0],$$

$$\mathbf{r}_v = [-a \cos u \sin v, -a \sin u \sin v, a \cos v],$$

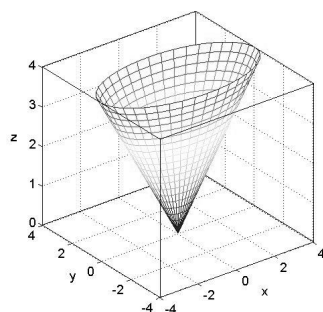
$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin u \cos v & a \cos u \cos v & 0 \\ -a \cos u \sin v & -a \sin u \sin v & a \cos v \end{vmatrix} \\ = [a^2 \cos u \cos^2 v, a^2 \sin u \cos^2 v, a^2 \sin v \cos v]$$



$$18. S: \mathbf{r}(u, v) = [2u \cos v, u \sin v, 2u]$$

$$\mathbf{r}_u = [2 \cos v, \sin v, 2], \mathbf{r}_v = [-2u \sin v, u \cos v, 0],$$

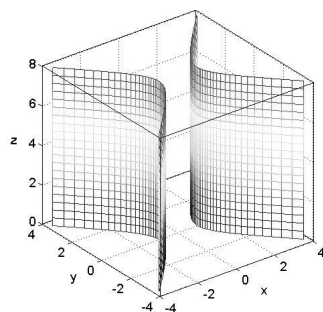
$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 \cos v & \sin v & 2 \\ -2u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = [-2u \cos v, -4u \sin v, 2u]$$



$$19. S: \mathbf{r}(u, v) = [\cosh u, \sinh u, v]$$

$$\mathbf{r}_u = [\sinh u, \cosh u, 0], \mathbf{r}_v = [0, 0, 1],$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sinh u & \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [\cosh u, -\sinh u, 0]$$



20. (a)  $\mathbf{r}^*$ 를 접평면 위의 한 점이라 하면  $\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)$ 는 접평면 위의 벡터이다.  $\mathbf{M}(P) = \mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)$ 는

접평면에 수직이므로

$$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)) \cdot (\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)) = 0 \text{ 이다.}$$

따라서  $(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)) \cdot \mathbf{r}_u(P) = 0$  이다.

$T(P)$ 의 벡터들은  $\mathbf{r}_u(P)$ 와  $\mathbf{r}_v(P)$ 의 일차결합으로

$$\text{표현되므로 } \mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P) = p\mathbf{r}_u(P) + q\mathbf{r}_v(P),$$

$$\mathbf{r}^* = p\mathbf{r}_u(P) + q\mathbf{r}_v(P) + \mathbf{r}(P) \text{ 이다.}$$

$$(b) \mathbf{n}(P) = \frac{\text{grad } g}{|\text{grad } g|} \text{ 이고 } (\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)) \cdot \mathbf{n}(P) = 0 \text{ 이므로}$$

$$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)) \cdot \nabla g(P) = 0 \text{ 이다.}$$

$$(c) g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\nabla g(P) = [-f_x(P), -f_y(P), 1] \text{ 이다.}$$

$$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)) \cdot \nabla g(P) = 0 \text{ 이므로}$$

$$-(x^* - x)f_x(P) - (y^* - y)f_y(P) + (z^* - z) = 0,$$

$$z^* - z = (x^* - x)f_x(P) + (y^* - y)f_y(P) \text{ 이다.}$$

## 4.6 Surface Integrals

1.  $\mathbf{r}_u = [1, 0, 3], \mathbf{r}_v = [0, 1, -2]$  이므로  $\mathbf{N} = [-3, 2, 1]$ .

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iint_R (3u^2 + 2v^2) du dv \\ &= \int_{-2}^2 \int_0^{1.5} (3u^2 + 2v^2) du dv \\ &= \int_{-2}^2 1.5(2.25 + 2v^2) dv = \frac{59}{2}\end{aligned}$$

2.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, 1 - u - v], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, -1], \mathbf{r}_v = [0, 1, -1]$  이므로  $\mathbf{N} = [1, 1, 1]$ .

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iint_R \{e^v + e^u + 1\} du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (e^v + e^u + 1) dv du \\ &= \int_0^1 (e^{1-u} + e^u - u - ue^u) du = 2e - \frac{7}{2}\end{aligned}$$

3.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v]$ ,  
 $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u &= [-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0], \\ \mathbf{r}_v &= [-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v]\end{aligned}$$

이므로  $\mathbf{N} = [\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \sin v \cos v]$ .

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u \cos u \cos^3 v) du dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos^3 v dv = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

4.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [5 \cos u, 5 \sin u, v], 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2$

$\mathbf{r}_u = [-5 \sin u, 5 \cos u, 0], \mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$  이므로

$\mathbf{N} = [5 \cos u, 5 \sin u, 0]$ .

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iint_R (5e^{5 \sin u} \cos u - 5e^v \sin u) du dv \\ &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5e^{5 \sin u} \cos u - 5e^v \sin u) du dv \\ &= \int_0^2 (e^5 - 1 - 5e^v) dv = 2e^5 - 5e^2 + 3\end{aligned}$$

5.  $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 2u], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$  이므로  
 $\mathbf{N} = [-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u]$ .

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iint_R u^3 (-2 \cos^2 v - 2 \sin^2 v + 1) du dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^4 -u^3 du dv = -128\pi\end{aligned}$$

6.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, u + v^2], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u$

$\mathbf{r}_u = [1, 0, 1], \mathbf{r}_v = [0, 1, 2v]$  이므로  $\mathbf{N} = [-1, -2v, 1]$ .

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \int_0^1 \int_0^u (-\cosh v + \sinh u) dv du \\ &= \int_0^1 (-\sinh u + u \sinh u) du = 1 - \sinh 1\end{aligned}$$

7.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u^2, u, v], 0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq v \leq u$

$\mathbf{r}_u = [2u, 1, 0], \mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$  이므로  $\mathbf{N} = [1, -2u, 0]$ .

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \int_0^{\pi/4} \int_0^u (-2u \sin u) dv du \\ &= \int_0^{\pi/4} (-2u^2 \sin u) du = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\pi^2}{8} - \pi - 4 \right) + 4\end{aligned}$$

8.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, \cos v, \sin v], 2 \leq u \leq 5, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$

$\mathbf{r}_u = [1, 0, 0], \mathbf{r}_v = [0, -\sin v, \cos v]$  이므로

$\mathbf{N} = [0, -\cos v, -\sin v]$ .

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \int_2^5 \int_0^{\pi/2} (-u \cos v - \sin v \cos v) dv du \\ &= \int_2^5 \left( -u - \frac{1}{2} \right) du = -12\end{aligned}$$

9.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [2 \cos u, v, 2 \sin u]$ ,

$0 \leq u \leq \cos^{-1} \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0 \leq v \leq 5$

$\mathbf{r}_u = [-2 \sin u, 0, 2 \cos u], \mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$  이므로

$\mathbf{N} = [-2 \cos u, 0, -2 \sin u]$ .

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \int_0^5 \int_0^{\cos^{-1}(1/2\sqrt{2})} -2 \sin u \cosh(2 \cos u) du dv \\ &= 5 \left( \sinh \frac{1}{\sqrt{2}} - \sinh 1 \right)\end{aligned}$$

10.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, 4u], 0 \leq v \leq \pi, 0 \leq u \leq 2$

$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 4], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$  이므로

$\mathbf{N} = [-4u \cos v, -4u \sin v, u]$ .

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \int_0^{\pi} \int_0^2 u^3 (-4 \sin^2 v \cos v - 4 \sin v \cos^2 v + 256u^2) du dv \\ &= \int_0^{\pi} \left( -16 \sin^2 v \cos v - 16 \sin v \cos^2 v + \frac{8192}{3} \right) dv \\ &= \frac{1}{3} (-32 + 8192\pi) = 8568\end{aligned}$$

12.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, 1 - u - v], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u$

$\mathbf{r}_u = [1, 0, -1], \mathbf{r}_v = [0, 1, -1]$  이므로

$\mathbf{N} = [1, 1, 1]$  이고  $|\mathbf{N}| = \sqrt{3}$  이다.

$$\begin{aligned}\iint_S G(\mathbf{r}) dA &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \sqrt{3} (\cos u + \sin u) dv du \\ &= \int_0^1 \sqrt{3} (\cos u + \sin u) (1 - u) du \\ &= \sqrt{3} (2 - \sin 1 - \cos 1)\end{aligned}$$

13.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, u + 2v], 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq u$

$\mathbf{r}_u = [1, 0, 1], \mathbf{r}_v = [0, 1, 2]$  이므로

$\mathbf{N} = [-1, -2, 1]$  이고  $|\mathbf{N}| = \sqrt{6}$  이다.

$$\begin{aligned}\iint_S G(\mathbf{r}) dA &= \int_0^{\pi} \int_0^u \sqrt{6} (2u + 3v) dv du \\ &= \int_0^{\pi} \frac{7\sqrt{6}}{2} u^2 du = \frac{7\sqrt{6}}{6} \pi^3\end{aligned}$$

14.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v]$ ,

$0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$

$$\mathbf{r}_u = [-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0],$$

$$\mathbf{r}_v = [-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v]$$

이므로  $\mathbf{N} = [\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \sin v \cos v]$  이고  $|\mathbf{N}| = \cos v$  이다.

$$\begin{aligned} & \iint_S G(\mathbf{r}) dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \{(a \cos u + b \sin u) \cos^2 v + c \sin v \cos v\} du dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ b(1 + \cos 2v) + \frac{c\pi}{2} \sin 2v \right\} dv = \frac{(b+c)\pi}{2} \end{aligned}$$

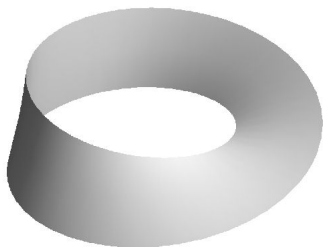
15.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, u^3], 0 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 2$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 3u^2], \mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$  이므로  $\mathbf{N} = [-3u^2, 0, 1]$   
 이고  $|\mathbf{N}| = \sqrt{9u^4 + 1}$  이다.

$$\begin{aligned} \iint_S G(\mathbf{r}) dA &= \int_{-2}^2 \int_0^1 (1 + 9u^4)^{3/2} \sqrt{1 + 9u^4} du dv \\ &= \int_{-2}^2 \int_0^1 (1 + 9u^4)^2 du dv = \int_{-2}^2 \frac{68}{5} dv = \frac{272}{5} \end{aligned}$$

16.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u^2], 1 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$   
 $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 2u], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$  이므로  
 $\mathbf{N} = [-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u]$  이고  $|\mathbf{N}| = \sqrt{4u^4 + u^2}$ .

$$\begin{aligned} \iint_S G(\mathbf{r}) dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 4v \sqrt{4u^2 + 1} du dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{37\sqrt{37} - 5\sqrt{5}}{12} dv = \frac{(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5})\pi^2}{96} \end{aligned}$$

17. 피비우스의 띠는 띠상의 한 점에서 출발하여 진행할 때 반대편을 통과하여 다시 제자리로 돌아온다. 즉 띠에 표시된 사각형의 개수가  $n$  개 이면 제자리로 돌아올 때까지  $2n$  개의 사각형을 지나게 된다.



19. 질량 중심의 정의를 나열하면

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int x dm, \bar{y} = \frac{1}{M} \int y dm, \bar{z} = \frac{1}{M} \int z dm.$$

이 때 균일한 밀도의 곡면을 고려하면,  
 $dm = \sigma dA$  이고 이를 대입하면 다음을 얻는다.

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x \sigma dA, \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_S y \sigma dA,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iint_S z \sigma dA.$$

20. 관성능률의 정의를 표현하면 회전축에서  
 질점까지의 거리를  $r$  이라 하면,  $I = \int r^2 dm$  이다.

이때 밀도가 균일한 곡면을 고려하면  
 $dm = \sigma dA$  이고 각 축으로부터의 거리를 각각  $r_x, r_y, r_z$  라 하면  $r_x^2 = y^2 + z^2, r_y^2 = z^2 + x^2, r_z^2 = x^2 + y^2$  이다. 이것을 관성능률의 정의에 대입하면 다음을 얻는다.

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \sigma dA, I_y = \iint_S (z^2 + x^2) \sigma dA,$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \sigma dA.$$

21. 임의의 점  $(X, Y, Z)$  에서 직선  $y = x, z = 0$  까지의  
 거리를  $R$  이라 하면,  $R^2 = \frac{1}{2}(X - Y)^2 + Z^2$  이다.

따라서 관성능률의 정의에 의해, 균일한 밀도의  
 곡면을 고려하면

$$I_{y=x, z=0} = \int R^2 dm = \iint_S \left[ \frac{1}{2}(x - y)^2 + z^2 \right] \sigma dA$$

이다.

22.  $z = \frac{h}{2}, y = 0$  에 대한 관성능률식을 정의하면

$$I_{z=\frac{h}{2}, y=0} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[ r^2 \sin^2 \theta + \left( \frac{h}{2} - z \right)^2 \right] \sigma r d\theta dz$$

이고  $r = 1, \sigma = 1$  이므로

$$\begin{aligned} I_{z=\frac{h}{2}, y=0} &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[ \sin^2 \theta + \left( \frac{h}{2} - z \right)^2 \right] d\theta dz \\ &= \int_0^h \left[ \pi + 2\pi \left( \frac{h}{2} - z \right)^2 \right] dz \\ &= \pi h \left( 1 + \frac{h^2}{6} \right) \end{aligned}$$

이다.

23.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u], 0 \leq u \leq h, 0 \leq v \leq 2\pi$   
 $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 1], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$  이므로  
 $\mathbf{N} = [-u \cos v, -u \sin v, u]$  이고  $|\mathbf{N}| = u\sqrt{2}$  이다.

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \sqrt{2} u^3 du dv = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{2}} h^4 dv = \frac{\pi h^4}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

24.  $I_K = \int_M (r + k)^2 dm$   
 $= \int_M r^2 dm + 2k \int_M r dm + k^2 \int_M dm$

이때  $r$  은 질량중심축으로부터의 거리를  
 의미하므로  $\int_M r dm = 0$  이다.

따라서  $I_K = I_B + k^2 M$  이다.

25. 직선  $x = 1, y = 0$  에서  $z$  축까지의 거리는 1이며  
 $M = \mu A = 4\pi$  이다.

$$S: \mathbf{r}(u, v) = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v]$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{r}_u = [-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0],$$

$$\mathbf{r}_v = [-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v]$$

$$\mathbf{N} = [\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \sin v \cos v]$$

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{\cos^2 v} = \cos v$$

$$\begin{aligned}
 I_B &= I_z = \iint_S (x^2 + y^2) dA \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv du = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} du = \frac{8\pi}{3} \\
 I_K &= \frac{8\pi}{3} + 4\pi = \frac{20\pi}{3}
 \end{aligned}$$

26. (a)  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$  이므로

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} &= (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \cdot (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \\
 &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u du^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v dudv + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v dv^2 \\
 &= E du^2 + 2F dudv + G dv^2
 \end{aligned}$$

9.5절의 식 (10)으로부터

$$l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} dt = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2} dt$$

(b)  $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(g(t), h(t))$ ,  $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(p(t), q(t))$  이므로

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_u g' + \mathbf{r}_v h' = \mathbf{a}, \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_u p' + \mathbf{r}_v q' = \mathbf{b} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } \cos \gamma = \frac{\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r}_1'| |\mathbf{r}_2'|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}
 (c) |\mathbf{N}|^2 &= |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \\
 &= (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v) \\
 &= EG - F^2
 \end{aligned}$$

따라서

$$A(s) = \iint_S dA = \iint_R |\mathbf{N}| dudv = \iint_R \sqrt{EG - F^2} dudv$$

(d)  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v]$

$$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v] \text{ 이므로}$$

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = -u \sin v \cos v + u \cos v \sin v = 0,$$

$$G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = du^2 + u^2 dv^2 = dr^2 + r^2 d\theta$$

$$\begin{aligned}
 A(s) &= \iint_R u du dv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^a u du dv = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 dv = a^2 \pi
 \end{aligned}$$

(e) 예제 5에서

$$S: \mathbf{r}(u, v) = [(a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v]$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}_u = [-(a + b \cos v) \sin u, (a + b \cos v) \cos u, 0],$$

$$\mathbf{r}_v = [-b \sin v \cos u, -b \sin v \sin u, b \cos v]$$

$$\text{이므로 } E = (a + b \cos v)^2, F = 0, G = b^2 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } ds^2 = (a + b \cos v)^2 du^2 + b^2 dv^2$$

$$\begin{aligned}
 A(s) &= \iint_R b(a + b \cos v) dudv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (ab + b^2 \cos v) dudv \\
 &= \int_0^{2\pi} 2\pi(ab + b^2 \cos v) dv = 4ab\pi^2
 \end{aligned}$$

$C$ 의 길이는  $2b\pi$ 이고  $C$ 의 무게중심이 움직이는 거리는  $2a\pi$ 이므로 Pappus의 정리에 의하여

$$A(s) = 2a\pi \cdot 2b\pi = 4ab\pi^2 \text{ 이다.}$$

(f) 원기둥에서

$$\mathbf{r}(u, v) = [a \cos u, a \sin u, v], 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq h$$

$$\mathbf{r}_u = [-a \sin u, a \cos u, 0], \mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$$

$$\text{이므로 } E = a^2, F = 0, G = 1 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } ds^2 = a^2 du^2 + dv^2$$

$$A(s) = \iint_R a du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^h a dv du = 2\pi ah$$

원뿔에서

$$\mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u], 0 \leq u \leq h, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 1], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$$

$$\text{이므로 } E = 2, F = 0, G = u^2 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } ds^2 = 2du^2 + u^2 dv^2$$

$$\begin{aligned}
 A(s) &= \iint_R \sqrt{2} u du dv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \sqrt{2} u du dv = \int_0^{2\pi} \frac{h^2}{\sqrt{2}} dv = \sqrt{2} \pi h^2
 \end{aligned}$$

구에서

$$\mathbf{r}(u, v) = [a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v],$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$$

$$\mathbf{r}_u = [-a \sin u \sin v, a \cos u \sin v, 0],$$

$$\mathbf{r}_v = [a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, -a \sin v]$$

$$\text{이므로 } E = a^2 \sin^2 v, F = 0, G = a^2 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } ds^2 = a^2 \sin^2 v du^2 + a^2 dv^2$$

$$\begin{aligned}
 A(s) &= \iint_R a^2 |\sin v| du dv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin v dv du = \int_0^{2\pi} 2a^2 du = 4\pi a^2
 \end{aligned}$$

## 4.7 Triple Integrals. Divergence Theorem of Gauss

$$\begin{aligned}
 1. M &= \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV \\
 &= \int_0^2 \int_{-1}^1 \int_{-4}^4 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \int_0^2 \int_{-1}^1 2 \left( \frac{64}{3} + 4y^2 + 4z^2 \right) dy dz \\
 &= \int_0^2 4 \left( \frac{68}{3} + 4z^2 \right) dz = 224
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. M &= \iiint_T xyz dV = \int_0^c \int_0^b \int_0^a xyz dx dy dz \\
 &= \int_0^c \int_0^b \frac{1}{2} a^2 yz dy dz = \int_0^c \frac{1}{4} a^2 b^2 z dz = \frac{a^2 b^2 c^2}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. M &= \iiint_T e^{-x-y-z} dV \\
 &= \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{-x-y-z} dx dy dz \\
 &= \int_0^2 \int_0^1 (-e^{-1-z} + e^{-y-z}) dy dz \\
 &= \int_0^2 (-2e^{-1-z} + e^{-z}) dz = 1 - 2e^{-1} - e^{-2} + 2e^{-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad M &= \iiint_T e^{-x-y-z} dV \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} e^{-x-y-z} dz dy dx \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-x} (-e^{-3} + e^{-x-y}) dy dx \\
&= \int_0^3 (-3e^{-3} + xe^{-3} - e^{-3} + e^{-x}) dx = 1 - \frac{17}{2}e^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad M &= \iiint_T \sin 2x \cos 2y dV \\
&= \int_0^6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}-x}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cos 2y dy dx dz \\
&= \int_0^6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) dx dz = \int_0^6 \frac{1}{8} dz = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

6.  $x = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$  로 치환하면  
 $0 \leq r \leq 4$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  이고  $dV = r dr d\theta dy$  이다.

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_T x^2 y^2 z^2 dV \\
&= \int_{-4}^4 \int_0^{2\pi} \int_0^4 y^2 r^5 \sin^2 \theta \cos^2 \theta dr d\theta dy \\
&= \int_{-4}^4 y^2 dy \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^4 r^5 dr = \frac{4^8 \pi}{9}
\end{aligned}$$

7.  $x = r \cos \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $z = r \sin \phi$  로 치환하면

$0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  이다.

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \cos \phi & -r \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \phi & 0 & r \cos \phi \end{vmatrix} = r^2 \cos \phi$$

이므로  $dV = r^2 \cos \phi dr d\theta d\phi$  이다.

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_T \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dV \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \theta r^2 \cos^3 \phi dr d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} \theta \cos^3 \phi d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi^2 a^3}{3} \cos^3 \phi d\phi = \frac{4\pi^2 a^3}{9}
\end{aligned}$$

8.  $x = r \cos \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $z = r \sin \phi$  로 치환하면

$0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  이다.

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \cos \phi & -r \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \phi & 0 & r \cos \phi \end{vmatrix} = r^2 \cos \phi$$

이므로  $dV = r^2 \cos \phi dr d\theta d\phi$  이다.

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_T (x^2 + y^2) dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^4 \cos^3 \phi dr d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{a^5}{5} \cos^3 \phi d\theta d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi a^5}{5} \cos^3 \phi d\phi = \frac{4\pi a^5}{15}
\end{aligned}$$

9.  $\text{div} \mathbf{F} = 2x + 2z$  이므로

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iiint_T (2x + 2z) dV \\
&= \int_0^2 \int_{-3}^3 \int_{-1}^1 (2x + 2z) dx dy dz \\
&= \int_0^2 \int_{-3}^3 4z dy dz = \int_0^2 24z dz = 48
\end{aligned}$$

10. 입체가 직육면체이므로 6개의 면으로 나누어서

계산한다.

윗면  $z = 2$  :  $\mathbf{N} = [0, 0, 1]$ ,  $\mathbf{F} = [x^2, 0, 4]$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \iint_S 4dA = 48$$

아랫면  $z = 0$  :  $\mathbf{N} = [0, 0, -1]$ ,  $\mathbf{F} = [x^2, 0, 0]$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

앞면  $x = 1$  :  $\mathbf{N} = [1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{F} = [1, 0, z^2]$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \iint_S 1 dA = 12$$

뒷면  $x = -1$  :  $\mathbf{N} = [-1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{F} = [-1, 0, z^2]$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \iint_S -1 dA = -12$$

오른쪽 면  $y = 3$  :  $\mathbf{N} = [0, 1, 0]$ ,  $\mathbf{F} = [x^2, 0, z^2]$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

왼쪽 면  $y = -3$  :  $\mathbf{N} = [0, -1, 0]$ ,  $\mathbf{F} = [x^2, 0, z^2]$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

따라서  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = 48$  이다.

11.  $\text{div} \mathbf{F} = e^x + e^y + e^z$  이므로

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iiint_T (e^x + e^y + e^z) dV \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (e^x + e^y + e^z) dx dy dz \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2\sinh 1 + 2e^y + 2e^z) dy dz \\
&= \int_{-1}^1 (8\sinh 1 + 4e^z) dz = 24\sinh 1
\end{aligned}$$

12.  $\text{div} \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$  이므로

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iiint_T (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dV \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^5 3r^4 \cos \phi dr d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 1875 \cos \phi d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3750\pi \cos \phi d\phi = 3750\pi
\end{aligned}$$

13.  $\text{div} \mathbf{F} = -\sin z$  이므로

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iiint_T -\sin z dV \\
&= \int_{-2}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 -r \sin z dr d\theta dz \\
&= \int_{-2}^2 \int_0^{2\pi} -2 \sin z d\theta dz = \int_{-2}^2 -4\pi \sin z dz = 0
\end{aligned}$$

14.  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \iiint_T -\sin z dV$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 -r \sin z dr d\theta dz \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -\frac{9}{2} \sin z d\theta dz \\
&= \int_0^2 -9\pi \sin z dz = 9\pi \cos 2 - 9\pi
\end{aligned}$$

15.  $\text{div} \mathbf{F} = 4x + y + \pi \cos \pi z$  이므로

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iiint_T (4x+y+\pi \cos \pi z) dV \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (4x+y+\pi \cos \pi z) dz dy dx \\ &= \frac{5}{24} + \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

16.  $\operatorname{div} \mathbf{F} = \sinh x$  이므로

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iiint_T \sinh x dV \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \sinh x dz dy dx \\ &= \cosh 1 - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

17.  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + 2y + 2z$  이므로

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iiint_T (2x+2y+2z) dV \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^z (2r \cos \theta + 2r \sin \theta + 2z) r dr d\theta dz = \frac{\pi h^4}{2}\end{aligned}$$

18.  $\operatorname{div} \mathbf{F} = y + z + x$  이므로

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA &= \iiint_T (x+y+z) dV \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2z} (r \cos \theta + r \sin \theta + z) r dr d\theta dz = 4\pi\end{aligned}$$

19.  $I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) dx dy dz$

$$\begin{aligned}&= \int_{-c}^c \int_{-b}^b \int_{-a}^a (y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \int_{-c}^c \int_{-b}^b 2a(y^2 + z^2) dy dz \\ &= \int_{-c}^c \left( \frac{4ab^3}{3} + 4abz^2 \right) dz = \frac{8ab^3c + 8abc^3}{3}\end{aligned}$$

20.  $x = r \sin \phi$ ,  $y = r \cos \theta \cos \phi$ ,  $z = r \sin \theta \cos \phi$  로 치환하면

$$0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ 이다.}$$

$$J = \begin{vmatrix} \sin \phi & 0 & r \cos \phi \\ \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \cos \phi & -r \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi \end{vmatrix} = r^2 \cos \phi$$

이므로  $dV = r^2 \cos \phi dr d\theta d\phi$  이다.

$$\begin{aligned}I_x &= \iiint_T (y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^4 \cos^3 \phi dr d\theta d\phi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5} a^5 \cos^3 \phi d\theta d\phi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi}{5} a^5 \cos^3 \phi d\phi = \frac{8\pi}{15} a^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}21. I_x &= \iiint_T (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr d\theta dx \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} a^4 d\theta dx = \frac{1}{2} \pi a^4 h\end{aligned}$$

22.  $x = u$ ,  $y = v \cos \theta$ ,  $z = v \sin \theta$  로 치환하면

$$0 \leq u \leq h, 0 \leq v \leq \sqrt{u}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}I_x &= \iiint_T (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^h \int_0^{\sqrt{u}} \int_0^{2\pi} v^3 dv d\theta du \\ &= \int_0^h \int_0^{\sqrt{u}} \frac{1}{4} u^2 du d\theta = \int_0^h \frac{h^3}{12} d\theta = \frac{\pi h^3}{6}\end{aligned}$$

23.  $x = u$ ,  $y = v \cos \theta$ ,  $z = v \sin \theta$  로 치환하면

$$0 \leq u \leq h, 0 \leq v \leq u, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ 이다.}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -v \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & v \cos \theta \end{vmatrix} = v \text{ 이므로 } dV = v dv d\theta du \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}I_x &= \iiint_T (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^h \int_0^u \int_0^{2\pi} v^3 dv d\theta du \\ &= \int_0^h \int_0^u \frac{1}{4} u^4 du d\theta = \int_0^h \frac{h^5}{20} d\theta = \frac{\pi h^5}{10}\end{aligned}$$

24. 문제 23번과 문제 22번의 Moment of Inertia는

$h \leq 1$  일 때 문제 23번의 부피가 문제 22번의 부피보다 작으므로 당연히 작다. 반대로  $h \geq 1$  일 때는 문제 23번의 부피가 상대적으로 크므로 산술적 계산을 통해서  $h \geq \sqrt{\frac{5}{3}}$  일 때 문제 22번의 Moment of Inertia의 값이 더 크다.

25.  $y = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$  로 치환하면  $dy dz = r dr d\theta$  이고  $y^2 + z^2 = r^2$  이다. 따라서  $(y^2 + z^2) dx dy dz = r^3 dr d\theta dx$  이고  $0 \leq r \leq r(x)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  이다.

$$\begin{aligned}I_x &= \iiint_T (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{r(x)} r^3 dr d\theta dx \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r^4(x) d\theta dx = \int_0^h \frac{\pi}{2} r^4(x) dx\end{aligned}$$

문제 20번 :  $r(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$  ( $-a \leq x \leq a$ ) 이므로

$$I_x = \int_{-a}^a \frac{\pi}{2} (x^4 - 2a^2 x^2 + a^4) dx = \frac{8\pi a^5}{15}$$

문제 21번 :  $r(x) = a$  이므로  $I_x = \int_0^h \frac{\pi a^4}{2} dx = \frac{\pi}{2} a^4 h$

문제 22번 :  $r(x) = \sqrt{x}$  이므로

$$I_x = \int_0^h \frac{\pi x^2}{2} dx = \frac{\pi h^3}{6}$$

문제 23번 :  $r(x) = x$  이므로  $I_x = \int_0^h \frac{\pi x^4}{2} dx = \frac{\pi h^5}{10}$

## 4.8 Further Applications of the Divergence Theorem

1.  $\nabla f = [-2x, -2y, 4z]$  이다.

$$S_1: \mathbf{r}_1(u, v) = [0, u, v], 0 \leq u \leq b, 0 \leq v \leq c$$

$$\mathbf{n}_1 = [-1, 0, 0], \frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n}_1 \cdot \nabla f = 0$$

$$S_2: \mathbf{r}_2(u, v) = [a, u, v], 0 \leq u \leq b, 0 \leq v \leq c$$

$$\mathbf{n}_2 = [1, 0, 0], \frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n}_2 \cdot \nabla f = -2a$$

$$S_3: \mathbf{r}_3(u, v) = [u, 0, v], 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq c$$

$$\mathbf{n}_3 = [0, -1, 0], \frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n}_3 \cdot \nabla f = 0$$

$$S_4: \mathbf{r}_4(u, v) = [u, b, v], 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq c$$

$$\mathbf{n}_4 = [0, 1, 0], \frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n}_4 \cdot \nabla f = -2b$$

$$S_5: \mathbf{r}_5(u, v) = [u, v, 0], 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq b$$

$$\mathbf{n}_5 = [0, 0, -1], \quad \frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n}_5 \cdot \nabla f = 0$$

$$S_6: \mathbf{r}_6(u, v) = [u, v, c], \quad 0 \leq u \leq a, \quad 0 \leq v \leq b$$

$$\mathbf{n}_6 = [0, 0, 1], \quad \frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n}_6 \cdot \nabla f = 4c$$

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dA &= \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} \frac{\partial f}{\partial n} dA \\ &= \int_0^c \int_0^b -2adudv + \int_0^c \int_0^a -2bhdudv + \int_0^b \int_0^a 4cdudv \\ &= -2abc - 2abc + 4abc = 0 \end{aligned}$$

$$2. \quad \nabla f = [2x, -2y, 0] \circlearrowleft \nabla.$$

$$S_1: \mathbf{r}_1(u, v) = [u \cos v, u \sin v, 0], \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\mathbf{n}_1 = [0, 0, -1], \quad \frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n}_1 \cdot \nabla f = 0$$

$$S_2: \mathbf{r}_2(u, v) = [u \cos v, u \sin v, h], \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\mathbf{n}_2 = [0, 0, 1], \quad \frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n}_2 \cdot \nabla f = 0$$

$$S_3: \mathbf{r}_3(u, v) = [2 \cos u, 2 \sin u, v], \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq h$$

$$\mathbf{r}_u = [-2 \sin u, 2 \cos u, 0], \quad \mathbf{r}_v = [0, 0, 1] \circlearrowleft \text{므로}$$

$$\mathbf{N} = [2 \cos u, 2 \sin u, 0], \quad |\mathbf{N}| = 2 \circlearrowleft \text{다.}$$

$$\mathbf{n}_3 = [\cos u, \sin u, 0], \quad \frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n}_3 \cdot \nabla f = 4 \cos 2u$$

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dA &= \sum_{i=1}^3 \iint_{S_i} \frac{\partial f}{\partial n} dA \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} 4 \cos 2u du dv = 0 \end{aligned}$$

$$3. \quad \nabla f = [0, 8y, 0], \quad \nabla g = [2x, 0, 0], \quad \nabla^2 f = 2 \circlearrowleft \text{므로}$$

$$\begin{aligned} \iiint_T 8y^2 dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 8y^2 dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 8y^2 dy dz = \int_0^1 \frac{8}{3} dz = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$S_1 \text{에서 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0, \quad S_2 \text{에서 } \frac{\partial g}{\partial n} = 2 \circlearrowleft \text{고 } f = 4u^2,$$

$$S_3 \text{에서 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0, \quad S_4 \text{에서 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0, \quad S_5 \text{에서 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0,$$

$$S_6 \text{에서 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \circlearrowleft \text{므로}$$

$$\begin{aligned} \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA &= \sum_{i=1}^3 \iint_{S_i} f \frac{\partial g}{\partial n} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 8u^2 dudv = \int_0^1 \frac{8}{3} dv = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \iiint_T (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA \circlearrowleft \text{다.}$$

$$4. \quad \nabla f = [1, 0, 0], \quad \nabla g = [0, 2y, 2z], \quad \nabla^2 g = 4 \circlearrowleft \text{므로}$$

$$\begin{aligned} \iiint_T 4x dV &= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 4x dx dy dz \\ &= \int_0^3 \int_0^2 2 dy dz = \int_0^3 4 dz = 12 \end{aligned}$$

$$S_1: \mathbf{r}_1(u, v) = [0, u, v], \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 3$$

$$\mathbf{n}_1 = [-1, 0, 0], \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 0$$

$$S_2: \mathbf{r}_2(u, v) = [1, u, v], \quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 3$$

$$\mathbf{n}_2 = [1, 0, 0], \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 0$$

$$S_3: \mathbf{r}_3(u, v) = [u, 0, v], \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 3$$

$$\mathbf{n}_3 = [0, -1, 0], \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 0$$

$$S_4: \mathbf{r}_4(u, v) = [u, 2, v], \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 3$$

$$\mathbf{n}_4 = [0, 1, 0], \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 4, \quad f = u$$

$$S_5: \mathbf{r}_5(u, v) = [u, v, 0], \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2$$

$$\mathbf{n}_5 = [0, 0, -1], \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 0$$

$$S_6: \mathbf{r}_6(u, v) = [u, v, 3], \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2$$

$$\mathbf{n}_6 = [0, 0, 1], \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 6, \quad f = u$$

$$\begin{aligned} \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA &= \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} f \frac{\partial g}{\partial n} dA \\ &= \int_0^3 \int_0^1 4u du dv + \int_0^2 \int_0^1 6u du dv \\ &= \int_0^3 2 dv + \int_0^2 3 dv = 12 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \iiint_T (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA \circlearrowleft \text{다.}$$

$$5. \quad \nabla f = [0, 12y, 0], \quad \nabla g = [4x, 0, 0], \quad \nabla^2 f = 12, \quad \nabla^2 g = 4 \circlearrowleft \text{므로}$$

$$\begin{aligned} \iiint_T (24y^2 - 24x^2) dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (24y^2 - 24x^2) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (24y^2 - 8) dy dz = \int_0^1 0 dz = 0 \end{aligned}$$

$$S_1 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \circlearrowleft \text{고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0,$$

$$S_2 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \circlearrowleft \text{고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 4, \quad f = 6u^2$$

$$S_3 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \circlearrowleft \text{고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0,$$

$$S_4 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 12, \quad y = 2u^2 \circlearrowleft \text{고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0,$$

$$S_5 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \circlearrowleft \text{고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0,$$

$$S_6 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \circlearrowleft \text{고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \circlearrowleft \text{므로}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA &= \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 24u^2 dudv + \int_0^1 \int_0^1 -24u^2 dudv = 0 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \iiint_T (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \iint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA.$$

$$6. \quad \nabla f = [2x, 0, 0], \quad \nabla^2 f = 2, \quad \nabla g = [0, 4y^3, 0], \quad \nabla^2 g = 12y^2$$

$$\begin{aligned} \iiint_T (12x^2 y^2 - 2y^4) dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (12x^2 y^2 - 2y^4) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (4y^2 - 2y^4) dy dz = \int_0^1 \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{5} \right) dz = \frac{14}{15} \end{aligned}$$

$$S_1 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ 이고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0,$$

$$S_2 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 2, \quad g = u^4, \quad \frac{\partial g}{\partial n} = 0$$

$$S_3 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ 이고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0,$$

$$S_4 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 0, \quad f = u^2 \text{ 이고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 4,$$

$$S_5 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ 이고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0,$$

$$S_6 \text{에서 } \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ 이고 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA &= \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 -2u^4 du dv + \int_0^1 \int_0^1 4u^2 du dv \\ &= \int_0^1 -\frac{2}{5} dv + \int_0^1 \frac{4}{3} dv = -\frac{14}{15} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \iiint_T (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \iint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA$$

$$7. \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S (F_1 dy dz + F_2 dz dx + F_3 dx dy) \text{ 이다.}$$

$$\mathbf{F} = [x, 0, 0] \text{ 이라 하면 } \operatorname{div} \mathbf{F} = 1 \text{ 이다.}$$

$$V = \iiint_T dV = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S x dy dz$$

$$\mathbf{F} = [0, y, 0] \text{ 이라 하면 } \operatorname{div} \mathbf{F} = 1 \text{ 이다.}$$

$$V = \iiint_T dV = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S y dz dx$$

$$\mathbf{F} = [0, 0, z] \text{ 이라 하면 } \operatorname{div} \mathbf{F} = 1 \text{ 이다.}$$

$$V = \iiint_T dV = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S z dx dy$$

$$\mathbf{F} = [x, y, z] \text{ 이라 하면 } \operatorname{div} \mathbf{F} = 3 \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dV = \iiint_T \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\ &= \frac{1}{3} \iint_S (x dy dz + y dz dx + z dx dy) \end{aligned}$$

$$8. \quad x = a(1-u) \cos v, \quad y = a(1-u) \sin v, \quad z = hu, \\ 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi \text{ 이다.}$$

$$dx dy = a^2(1-u) du dv \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} V &= \iint_S z dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 ha^2 u(1-u) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2 h}{6} d\theta = \frac{\pi a^2 h}{3} \end{aligned}$$

$$9. \text{ 반구이므로 } x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad 0 \leq z \text{ 이다.}$$

$$\text{극좌표를 이용하면 반구의 표면은 } z=0 \text{ 과}$$

$$z = \sqrt{a^2 - r^2} \text{ 으로 표현할 수 있다.}$$

$$dx dy = r dr d\theta \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} V &= \iint_S z dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} d\theta = \frac{2\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

이다.

$$10. \quad f = x^2 + y^2 + z^2 \text{ 이라 하면 } \nabla f = [2x, 2y, 2z], \quad \nabla^2 f = 6$$

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\nabla f \cdot \mathbf{n}}{2r} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \mathbf{n} = 2r \cos \phi \text{ 이다. 따라서}$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dV = \iiint_T \frac{1}{6} \nabla^2 f dV \\ &= \frac{1}{6} \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dA = \frac{1}{6} \iint_S 2r \cos \phi dA = \frac{1}{3} \iint_S r \cos \phi dA \end{aligned}$$

$$11. \quad S: \mathbf{r}(u, v) = [a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v],$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{r}_u = [-a \sin u \cos v, a \cos u \cos v, 0],$$

$$\mathbf{r}_v = [-a \cos u \sin v, -a \sin u \sin v, a \cos v]$$

$$\text{이므로 } \mathbf{N} = [a^2 \cos u \cos^2 v, a^2 \sin u \cos^2 v, a^2 \sin v \cos v] \text{ 이}$$

$$\text{고 } |\mathbf{N}| = a^2 \cos v, \quad \mathbf{n} = [\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v] \text{ 이다.}$$

$$r \cos \phi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = a \cos^2 u \cos^2 v + a \sin^2 u \cos^2 v + a \sin^2 v = a$$

$$V = \iiint_T dV = \frac{1}{3} \iint_S r \cos \phi dA$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} a^3 \cos v dv du$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a^3 \cos v dv = \frac{4\pi a^3}{3}$$

$$12. \text{ (a) 식 (8)에서 } f=g \text{ 이면 } g \text{ 가 조화함수이므로}$$

$$\begin{aligned} \iint_S g \frac{\partial g}{\partial n} dA &= \iiint_T (g \nabla^2 g + \nabla g \cdot \nabla g) dV \\ &= \iiint_T |\nabla g|^2 dV \end{aligned}$$

$$\text{(b) } S \text{ 위에서 } \frac{\partial g}{\partial n} = 0 \text{ 이므로 } \iiint_T |\nabla g|^2 dV = 0 \text{ 이다.}$$

즉,  $T$ 에서  $\nabla g = \mathbf{0}$  이다. 따라서  $T$ 에서  $g$ 는 상수 함수이다.

$$\text{(c) 식 (9)에서 } f \text{ 와 } g \text{ 가 조화함수이므로}$$

$$\iint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA = \iiint_T (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = 0$$

$$\text{(d) } h = f - g \text{ 라 하면 } f \text{ 와 } g \text{ 가 조화함수이므로 } h \text{ 도}$$

$$\text{조화함수이다. } S \text{ 위에서 } \frac{\partial g}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \text{ 이므로 } \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \text{ 이}$$

다. (b)에 의하여  $T$ 에서  $h$ 는 상수함수이다. 따라서  $T$ 에서  $f = g + c$  이다.

$$\text{(e) } \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla^2 f \text{ 이므로 식 (2)로부터}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{1}{V(T)} \iint_S (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{1}{V(T)} \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dA \end{aligned}$$



## 4.9 Stokes's Theorem

1.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, v], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 4$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 0], \mathbf{r}_v = [0, 1, 1]$  이므로  $\mathbf{N} = [0, -1, 1]$ .  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [0, 2z, -2x], \text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 2v, -2u]$   

$$\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_0^4 \int_0^1 (-2v - 2u) du dv = -20$$
따라서  $\pm 20$  이다.
2.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, 2], 0 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 0], \mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$  이므로  $\mathbf{N} = [0, 0, 1]$ .  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [3 \cosh z, -1, 13 \cos y],$   
 $\text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [3 \cosh 2, -1, 13 \cos v]$   

$$\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 13 \cos v du dv = 52$$
따라서  $\pm 52$  이다.
3.  $S: \mathbf{r}(u, v) = \left[ u, v, \frac{v^2}{2} \right], -1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 0], \mathbf{r}_v = [0, 1, v]$  이므로  $\mathbf{N} = [0, -v, 1]$ .  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [2e^{-z} \cos y, -e^{-z}, 0],$   
 $\text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [2e^{-v^2/2} \cos v, -e^{-v^2/2}, 0]$   

$$\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_0^1 \int_{-1}^1 (ve^{-v^2/2}) du dv = 2 - 2e^{-1/2}$$
따라서  $\pm 2(1 - e^{-1/2})$  이다.
4.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, uv], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 4$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, v], \mathbf{r}_v = [0, 1, u]$  이므로  $\mathbf{N} = [-v, -u, 1]$ .  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [0, 2z, -2x], \text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 2uv, -2u]$   

$$\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_0^4 \int_0^1 (-2u^2 v - 2u) du dv = -\frac{28}{3}$$
따라서  $\pm \frac{28}{3}$  이다.
5.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, 1], 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq a$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 0], \mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$  이므로  $\mathbf{N} = [0, 0, 1]$ .  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [0, 2z, \frac{3}{2}], \text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 2, \frac{3}{2}]$   

$$\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_0^a \int_0^a \frac{3}{2} du dv = \frac{3}{2} a^2$$
따라서  $\pm \frac{3}{2} a^2$  이다.
6.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, 0], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$   
 $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$  이므로  
 $\mathbf{N} = [0, 0, u]$ .  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [0, 0, -3x^2 - 3y^2], \text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 0, -3u^2]$   

$$\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -3u^3 du dv = -\frac{3}{2} \pi$$
따라서  $\pm \frac{3}{2} \pi$  이다.
7.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, u^2], 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 2u], \mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$  이므로  $\mathbf{N} = [-2u, 0, 1]$ .  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [-e^z, -e^x, -e^y],$

$$\begin{aligned} \text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= [-e^u, -e^u, -e^v] \\ \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA &= \int_0^1 \int_0^2 (2ue^u - e^v) du dv \\ &= e^4 - 2e + 2 \end{aligned}$$

따라서  $\pm(e^4 - 2e + 2)$  이다.

8.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u], 0 \leq u \leq h, 0 \leq v \leq \pi$   
 $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 1], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$  이므로  
 $\mathbf{N} = [-u \cos v, -u \sin v, u]$ .  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [2y, 2z, 2x], \text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [2u \sin v, 2u, 2u \cos v]$

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA \\ = \int_0^\pi \int_0^h u(2 \cos v - 2 \sin v - \sin 2v) du dv = -2h^2 \end{aligned}$$

따라서  $\pm 2h^2$  이다.

9.  $\mathbf{r}_1(s) = [s, 0, 1], 0 \leq s \leq a$  이면

$$\mathbf{r}_1'(s) = [1, 0, 0], \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) = \left[1, \frac{3}{2}, 0\right]$$

- $\mathbf{r}_2(s) = [a, s, 1], 0 \leq s \leq a$  이면

$$\mathbf{r}_2'(s) = [0, 1, 0], \mathbf{F}(\mathbf{r}_2) = \left[1, \frac{3}{2}, a, 0\right]$$

- $\mathbf{r}_3(s) = [a-s, a, 1], 0 \leq s \leq a$  이면

$$\mathbf{r}_3'(s) = [-1, 0, 0], \mathbf{F}(\mathbf{r}_3) = \left[1, \frac{3}{2}, (a-s), 0\right]$$

- $\mathbf{r}_4(s) = [0, a-s, 1], 0 \leq s \leq a$  이면

$$\mathbf{r}_4'(s) = [0, -1, 0], \mathbf{F}(\mathbf{r}_4) = [1, 0, 0]$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds = \int_0^a ds + \int_0^a \frac{3}{2} a ds + \int_0^a -ds = \frac{3}{2} a^2$$

10.  $\mathbf{r}(s) = [\cos s, \sin s, 0], 0 \leq s \leq 2\pi$  이면

$$\mathbf{r}'(s) = [-\sin s, \cos s, 0], \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [\sin^3 s, -\cos^3 s, 0]$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds = \int_0^{2\pi} (-\sin^4 s - \cos^4 s) ds = -\frac{3}{2} \pi$$

11.  $\mathbf{r}(s) = [\cos s, \sin s, 0], 0 \leq s \leq 2\pi$  이면

$$\mathbf{r}'(s) = [-\sin s, \cos s, 0], \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [-\sin s, \cos s, 0]$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 s + \cos^2 s) ds = 2\pi$$

주어진 벡터장이 원점에서 연속이 아니므로 Stokes의 정리를 적용할 수 없다.

$$S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, 0], 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = [0, 0, u] \text{ 이다. } \text{curl} \mathbf{F} = [0, 0, 0] \text{ 이므로}$$

$$\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

13.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, 4], 0 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 2\pi$

$$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = [0, 0, u] \text{ 이다. } \text{curl} \mathbf{F} = [0, 0, 9] \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds &= \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 9u du dv = \int_0^{2\pi} 72 dv = 144\pi \end{aligned}$$

14.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [2, u \cos v, u \sin v], 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\pi$

$\mathbf{r}_u = [0, \cos v, \sin v], \mathbf{r}_v = [0, -u \sin v, u \cos v]$  이므로

$\mathbf{N} = [u, 0, 0]$  이다.

$$\text{curl} \mathbf{F} = [3y^2, 3z^2, 3x^2],$$

$\text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [3u^2 \cos^2 v, 3u^2 \sin^2 v, 12]$  이므로

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds &= \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (-3u^3 \sin^3 v + 12u \cos v) du dv = 0 \end{aligned}$$

15.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, 0], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 0], \mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$  이므로  $\mathbf{N} = [0, 0, 1]$  이다.  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [0, -1, 2x - 2y], \text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, -1, 2u - 2v]$   
 이므로

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds &= \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^u (2u - 2v) dv du = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

16.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, 0], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 0], \mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$  이므로  $\mathbf{N} = [0, 0, 1]$  이다.  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [0, -e^x, -e^y], \text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, -e^u, -e^v]$   
 이므로

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds &= \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^u -e^v dv du = \int_0^1 (-e^u + 1) du = -e + 2 \end{aligned}$$

17.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [\cos u, \sin u, v], 0 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$   
 $\mathbf{r}_u = [-\sin u, \cos u, 0], \mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$  이므로  
 $\mathbf{N} = [\cos v, \sin v, 0]$  이다.  $\text{curl} \mathbf{F} = [-3z^2, 0, 0],$   
 $\text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [-3u^2, 0, 0]$  이므로

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds &= \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 -3u^2 \cos v du dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos v dv = -1 \end{aligned}$$

18.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, 2\cos v, 2\sin v], 0 \leq u \leq h, 0 \leq v \leq \pi$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 0], \mathbf{r}_v = [0, -2\sin v, 2\cos v]$  이므로  
 $\mathbf{N} = [0, -2\cos v, -2\sin v]$  이다.  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [-2, 0, 1]$  이므로

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds &= \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^h -2 \sin v du dv = \int_0^{\pi} -2h \sin v dv = -4h \end{aligned}$$

19.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$   
 $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 1], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$  이므로  
 $\mathbf{N} = [-u \cos v, -u \sin v, u]$  이다.  $\text{curl} \mathbf{F} = [-e^z, 1, 0],$   
 $\text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [-e^u, 1, 0]$  이므로

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds &= \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (ue^u \cos v - u \sin v) du dv = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

20.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, 2\cos v, 2\sin v], 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$   
 $\mathbf{r}_u = [1, 0, 0], \mathbf{r}_v = [0, -2\sin v, 2\cos v]$  이므로  
 $\mathbf{N} = [0, -2\cos v, -2\sin v]$  이다.  
 $\text{curl} \mathbf{F} = [0, 0, -\sin x], \text{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 0, -\sin u]$  이므로  
 $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA$   
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} 2 \sin u \sin v du dv = 4$

## Chapter 4 Review Questions and Problems

1.  $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$   
 $= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$   
 $\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$   
 또는  $\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx dy$
2. 영역에서 선적분의 경로의 독립성이란 끝점이 임의의 경로상에서 주어진 함수의 적분은 영역에 놓여 있는 같은 끝점을 연결하는 모든 적분경로에 대하여 같은 적분값을 가짐을 의미한다. 경로의 독립성이 가역성을 보장하는 도구이므로 중요하다.
3. 이중적분은 Green 정리에 의하여 경계선상에서의 선적분으로 변환된다.

$$\iint_R \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$$

곡면적분은 Stokes 정리에 의하여 경계선상에서의 선적분으로 변환된다.

$$\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(s) ds$$

4. Gauss 발산정리는 공간상의 영역에서 수행되는 삼중적분을 경계면에서의 면적분으로 변환한다.

$$\iiint_T \text{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$$

5. 회전의 정의는  $\text{curl} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$  이며

완전성과 적분경로의 독립성에 대한 판정법에 사용된다. 또한 Stokes 정리에도 적용되므로 매우 중요하다.

6. 선적분을 응용하는 경우는 가해진 임에 의해 수행된 일을 계산할 때이다.  
 면적분을 응용한 경우는 표면을 지나는 flux를 계산하는 것이다.

7. 곡면의 방향은 두 개의 가능한 단위법선벡터 중의 하나를 연속적으로 선택하여 결정된다. 곡면적분

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$$

의존하는 유향곡면 위에서의 적분이다. 곡면의 방향이 바뀌면 단위법선벡터의 방향이 바뀌므로 적분

에 -1을 곱하는 것과 대응된다.

8. Gauss 발산정리는 공간상의 영역에서 수행되는 삼중적분을 경계면에서의 면적분으로 변환한다.

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA$$

발산정리의 적용으로 열전달 방정식(heat equation)을 모델링할 수 있다. 또한 Potential 이론에서 중요한 역할을 한다.

9. 실제로 방향성을 알아야 적분이 가능하므로 벡터장에 대해 먼저 정의하는 것이 바람직하다.
10. Laplace 방정식은  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ 이다.

물리적으로 Laplace 방정식은 중력장, 전자기장 등을 구하는데 적용된다. Laplace 방정식의 해가 연속인 2계 편도함수를 갖는다면 그 해를 조화함수라 한다. 조화함수를 내부가 모두 정의역에 포함되는 닫힌곡면 위에서 적분하면 적분값은 0이다. 조화함수의 정의역이 구분적으로 매끄럽고 방향을 줄 수 있으며 내부가 정의역에 완전히 포함되는 곡면상의 모든 점에서 그 값이 0이면 함수는 내부에서 항등적으로 0이다.

11.  $C: \mathbf{r}(t) = [4-10t, 2+8t] \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [2(4-10t)^2, -4(2+8t)^2],$$

$$\mathbf{r}'(t) = [-10, 8]$$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [-20(4-10t)^2 - 32(2+8t)^2] dt = -\frac{4528}{3}$$

12.  $\operatorname{curl} \mathbf{F} = [0, 0, 0]$  이므로 적분경로에 무관하다.

$$f = \int y \cos xy dx + \phi(y, z) = \sin xy + \phi(y, z) \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \phi(y, z) = \psi(z) \text{ 이고 } f = \sin xy + \psi(z) \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \psi' = e^z, \psi(z) = \int e^z dz + c = e^z + c \text{ 이므로}$$

$$f = \sin xy + e^z \text{ 이다. 따라서}$$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = [\sin xy + e^z]_{(\pi, 1, 0)}^{(1/2, \pi, 1)} = e$$

13.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, 0], 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2$

$$\mathbf{r}_u = [1, 0, 0], \mathbf{r}_v = [0, 1, 0] \text{ 이므로 } \mathbf{N} = [0, 0, 1] \text{ 이다.}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = [0, 0, 5 \cos x], \operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 0, 5 \cos u] \text{ 이므로}$$

Stokes 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} (5 \cos u) du dv = \int_0^2 5 dv = 10 \end{aligned}$$

따라서  $\pm 10$ 이다.

14. Green 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \iint_R (3x^2 + 3y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 3r^3 dr d\theta = \frac{1875\pi}{2} \end{aligned}$$

15.  $\operatorname{curl} \mathbf{F} = [0, 0, 0]$  이므로 Stokes 정리에 의하여

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

16.  $\operatorname{curl} \mathbf{F} = [2xy, -y^2, 0]$  이므로 적분경로에 의존하다.

$$C: \mathbf{r}(t) = [2 \cos t, 2 \sin t, 3t] \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [4 \cos^2 t, 4 \sin^2 t, 8 \sin^2 t \cos t],$$

$$\mathbf{r}'(t) = [-2 \sin t, 2 \cos t, 3]$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi (-8 \cos^2 t \sin t + 32 \sin^2 t \cos t) dt \\ &= -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

17.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u \sin v + 2], 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\pi$

$$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, \cos v], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, -u \sin v]$$

$$\text{이므로 } \mathbf{N} = [-u, 0, u] \text{ 이다. } \operatorname{curl} \mathbf{F} = [3, 9, 5] \text{ 이므로}$$

Stokes 정리에 의하여

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 2u du dv = \int_0^{2\pi} 9 dv = 18\pi$$

이다. 따라서  $\pm 18\pi$ 이다.

18.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, v, u], 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$

$$\mathbf{r}_u = [1, 0, 1], \mathbf{r}_v = [0, 1, 0] \text{ 이므로 } \mathbf{N} = [-1, 0, 1] \text{ 이다.}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = [0, \pi \cos \pi x, -\pi \sin \pi x - \pi \cos \pi y]$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, \pi \cos \pi u, -\pi \sin \pi u - \pi \cos \pi v] \text{ 이므로}$$

Stokes 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (-\pi \sin \pi u - \pi \cos \pi v) du dv = -4 \end{aligned}$$

이다. 따라서  $\pm 4$ 이다.

19.  $\operatorname{curl} \mathbf{F} = [0, 0, 0]$  이므로 적분경로에 무관하다.

$$f = \int z dx + \phi(y, z) = xz + \phi(y, z) \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2y, \phi(y, z) = \int 2y dy + \psi(z) = y^2 + \psi(z) \text{ 이고}$$

$$f = xz + y^2 + \psi(z) \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + \psi' = x, \psi(z) = c \text{ 이므로 } f = xz + y^2 \text{ 이다.}$$

따라서

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = [xz + y^2]_{(1, 0, 0)}^{(1, 0, 2\pi)} = 2\pi$$

20.  $\operatorname{curl} \mathbf{F} = [0, 0, 0]$  이므로 적분경로에 무관하다.

$$f = \int ze^{xz} dx + \phi(y, z) = e^{xz} + \phi(y, z) \text{ 이므로}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2 \sinh 2y,$$

$$\phi(y, z) = \int 2 \sinh 2y dy + \psi(z) = \cosh 2y + \psi(z) \text{ 이고}$$

$$f = e^{xz} + \cosh 2y + \psi(z) \text{ 이다.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xe^{xz} + \psi' = xe^{xz}, \psi(z) = c \text{ 이므로 } f = e^{xz} + \cosh 2y$$

이다. 따라서

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = [e^{xz} + \cosh 2y]_{(-1, -1, 1)}^{(1, 1, 1)} = 2 \sinh 1$$

21.  $M = \int_0^2 \int_0^x xy dy dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^3 dx = 2$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^x x^2 y dy dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x^4 dx = \frac{8}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^x xy^2 dy dx = \frac{1}{6} \int_0^2 x^4 dx = \frac{16}{15}$$

$$22. M = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^\pi \int_0^a r^3 dr d\theta = \frac{a^4 \pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{4}{a^4 \pi} \iint_R x(x^2 + y^2) dx dy = \frac{4}{a^4 \pi} \int_0^\pi \int_0^a r^4 \cos \theta dr d\theta \\ &= \frac{4}{5\pi} \int_0^\pi \cos \theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{4}{a^4 \pi} \iint_R y(x^2 + y^2) dx dy = \frac{4}{a^4 \pi} \int_0^\pi \int_0^a r^4 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{4a}{5\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{8a}{5\pi} \end{aligned}$$

$$23. M = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} x^2 dy dx = \int_{-1}^2 (x^3 + 2x^2 - x^4) dx = \frac{63}{20}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{20}{63} \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} x^3 dy dx = \frac{20}{63} \int_{-1}^2 (x^4 + 2x^3 - x^5) dx = \frac{8}{7} \\ \bar{y} &= \frac{20}{63} \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} x^2 y dy dx = \frac{20}{63} \int_{-1}^2 \left( \frac{1}{2} x^4 + 2x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2} x^6 \right) dx = \frac{118}{49} \end{aligned}$$

$$24. M = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^4} dy dx = \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{8}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{5}{8} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^4} x dy dx = \frac{5}{8} \int_{-1}^1 (x - x^5) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{5}{8} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^4} y dy dx = \frac{5}{8} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 - 2x^4 + x^8) dx = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$25. M = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} ky dy dx = \frac{4k}{15}$$

$$\bar{x} = \frac{15}{4k} \int_0^1 \int_0^{1-x^2} kxy dy dx = \frac{5}{16}$$

$$\bar{y} = \frac{15}{4k} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} ky^2 dy dx = \frac{4}{7}$$

27. Gauss의 발산정리에 의하여

$\text{div} \mathbf{F} = a + b + c$  이므로

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA = \iiint_T (a + b + c) dV = 144\pi(a + b + c)$$

28. 타원체의 매개변수 방정식은

$$\mathbf{r} = [ar \cos \theta \sin \phi, br \sin \theta \sin \phi, cr \cos \phi] \text{ 이다.}$$

타원체의 제1팔분원의 부피를 계산하면

$$\iiint_T dV = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \phi d\phi d\theta dr = \frac{\pi}{6} abc$$

이다.

Gauss의 발산정리에 의하여

$\text{div} \mathbf{F} = 3$  이므로

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA = \iiint_T 3 dV = \frac{1}{2} \pi abc$$

이다.

29. Gauss의 발산정리에 의하여

$\text{div} \mathbf{F} = 20 + 6z^2$  이므로

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA &= \iiint_T (20 + 6z^2) dV \\ &= \int_0^2 \int_0^1 \int_0^1 (20 + 6z^2) dz dy dx = 21 \end{aligned}$$

이다.

30.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [2\cos u \cos v, 2\sin u \cos v, \sin v]$ ,

$$0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{r}_u = [-2\sin u \cos v, 2\cos u \cos v, 0],$$

$$\mathbf{r}_v = [-2\cos u \sin v, -2\sin u \sin v, \cos v]$$

이므로  $\mathbf{N} = [2\cos u \cos^2 v, 2\sin u \cos^2 v, 4\sin v \cos v]$ .

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \{2(\cos u + \sin u) \cos^2 v + 4\sin v \cos v\} du dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\pi \sin v \cos v dv = 4\pi \end{aligned}$$

31. Gauss의 발산정리에 의하여

$\text{div} \mathbf{F} = e^x + e^y + e^z$  이므로

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA &= \iiint_T (e^x + e^y + e^z) dV \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (e^x + e^y + e^z) dz dy dx \\ &= 24 \sinh 1 \end{aligned}$$

이다.

32.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u^2]$ ,

$$0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 2u], \mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = [-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [u^2 \sin^2 v, u^2 \cos^2 v, u^4]$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (-2u^4 \sin^2 v \cos v - 2u^4 \cos^2 v \sin v + u^5) du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{486}{5} \sin^3 v \cos v - \frac{486}{5} \cos^3 v \sin v + \frac{243}{2} \right) dv \\ &= 243\pi \end{aligned}$$

33.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [u, u^2, v], 0 \leq u \leq 2, -2 \leq v \leq 2$

$$\mathbf{r}_u = [1, 2u, 0], \mathbf{r}_v = [0, 0, 1] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = [2u, -1, 0]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [u^4, u^2, v^2]$$

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{-2}^2 \int_0^2 (2u^5 - u^2) du dv = \frac{224}{3}$$

34.  $S: \mathbf{r}(u, v) = [\cos u, \sin u, v], 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 5$

$$\mathbf{r}_u = [-\sin u, \cos u, 0], \mathbf{r}_v = [0, 0, 1] \text{ 이므로}$$

$$\mathbf{N} = [\cos u, \sin u, 0]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [\cos u, \cos u \sin u, v]$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dA &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} (\cos^2 u + \cos u \sin^2 u) du dv \\ &= \int_0^5 \pi dv = 5\pi \end{aligned}$$



35. Gauss의 발산정리에 의하여

$$\operatorname{div} \mathbf{F}=2 \text { 이므로 } \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d A=\iiint_T 2 d V=72 \pi$$