ROBOTICS

Spatial Descriptions and Transformations

Http://raic.kunsan.ac.kr

로보틱스 및 인공지능 제어 연구실

Robotics & Artificial Intelligent Control Laboratory

contents

1. Introduction

- Define of a robot manipulation
  - 의미: 공간상에서 공구 또는 부품을 어떤 종류의 기구를 이용하여 옮김
  - 부품 또는 기구자체의 위치와 방위를 표시 할 필요가 있음

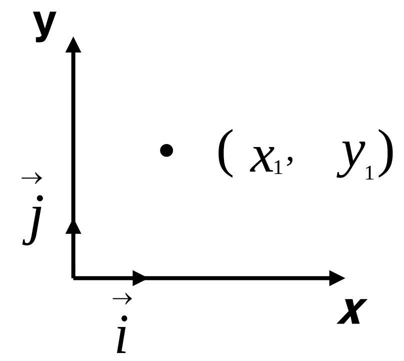
P-1. Coordinates

- **Coordinates** : any set of numbers which can characterize the object uniquely

  Ex) Point : (x, y), (r, θ)

  Triangle : {(1,1), (0,0), (3, -2)}

  Line : {(x, y) | ax+by+c=0}



- **Coordinate system(=frame):**

  system of basis vectors by which an unique representation is possible.

P-2. Vectors

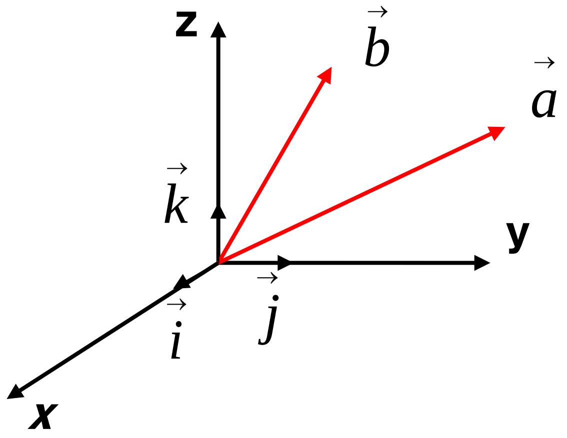
- **Vectors : magnitude and directions**
- **Notation :** $\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}$

Let $\vec{a} = (a_1, \ a_2, \cdots\cdots, \ a_n)$ $\qquad \vec{b} = (b_1, \ b_2, \cdots\cdots, \ b_n)$

Then $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \ a_2 + b_2, \cdots\cdots, \ a_n + b_n)$

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \ \alpha a_2, \cdots\cdots, \alpha a_n)$$

3-dimensional space (cartesian space)



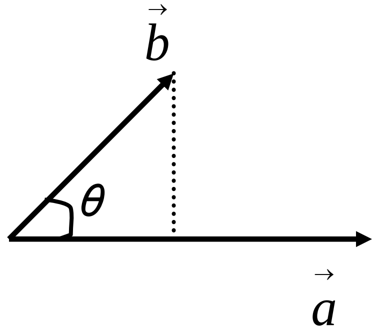
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ **: unit vectors**

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

$$\alpha \vec{a} = \alpha(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = (\alpha a_x)\vec{i} + (\alpha a_y)\vec{j} + (\alpha a_z)\vec{k}$$

Dot product (Scalar product)



$$\vec{a}\bullet\vec{b} = ab\cos\theta$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\bullet(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

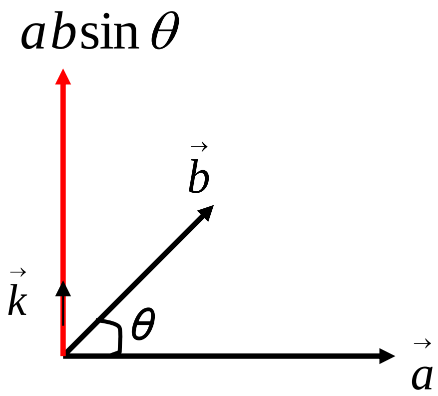
여기서, $\vec{i}\bullet\vec{i} = \vec{j}\bullet\vec{j} = \vec{k}\bullet\vec{k} = 1$

$$\vec{i}\bullet\vec{j} = \vec{j}\bullet\vec{k} = \vec{k}\bullet\vec{i} = 0$$

교환 법칙 $\vec{a}\bullet\vec{b} = \vec{b}\bullet\vec{a}$

분배 법칙 $(\vec{a}+\vec{b})\bullet\vec{c} = \vec{a}\bullet\vec{c} + \vec{b}\bullet\vec{c}$

Cross product (Vector product)



$$\vec{a}\times\vec{b} = ab\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

여기서, $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

교환 법칙 : $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

분배 법칙 : $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

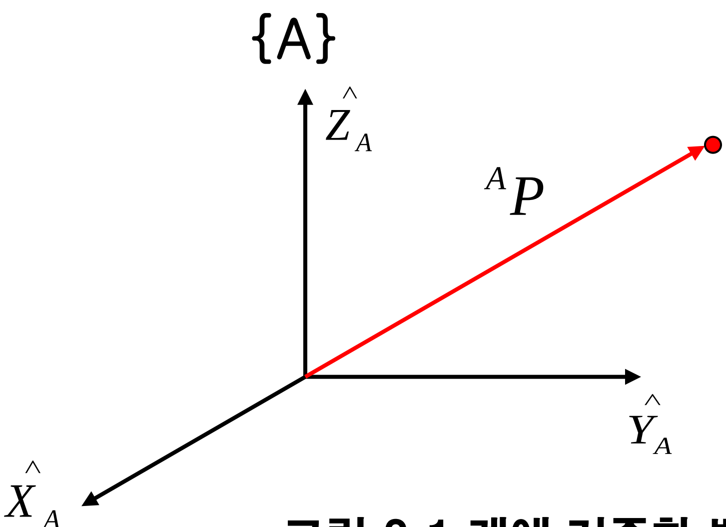
2. Descriptions

1. Description of a position

좌표계가 설정되면 우주상의 어떤 점(point)도 3X1의 위치 벡터로서 위치를 정할 수 있다.

- 벡터들이 자신이 설정된 좌표계를 나타내는 첨자를 좌측 상반부 (leading superscript)에 달고 있다.

ex) ^{A}P 는 frame {A}의 축들을 따라서 측정된 거리를 나타내는 수치값을 갖으며, 3x1 벡터로 표현된다.



$$^{A}p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

그림 2.1 계에 기준한 벡터의 예

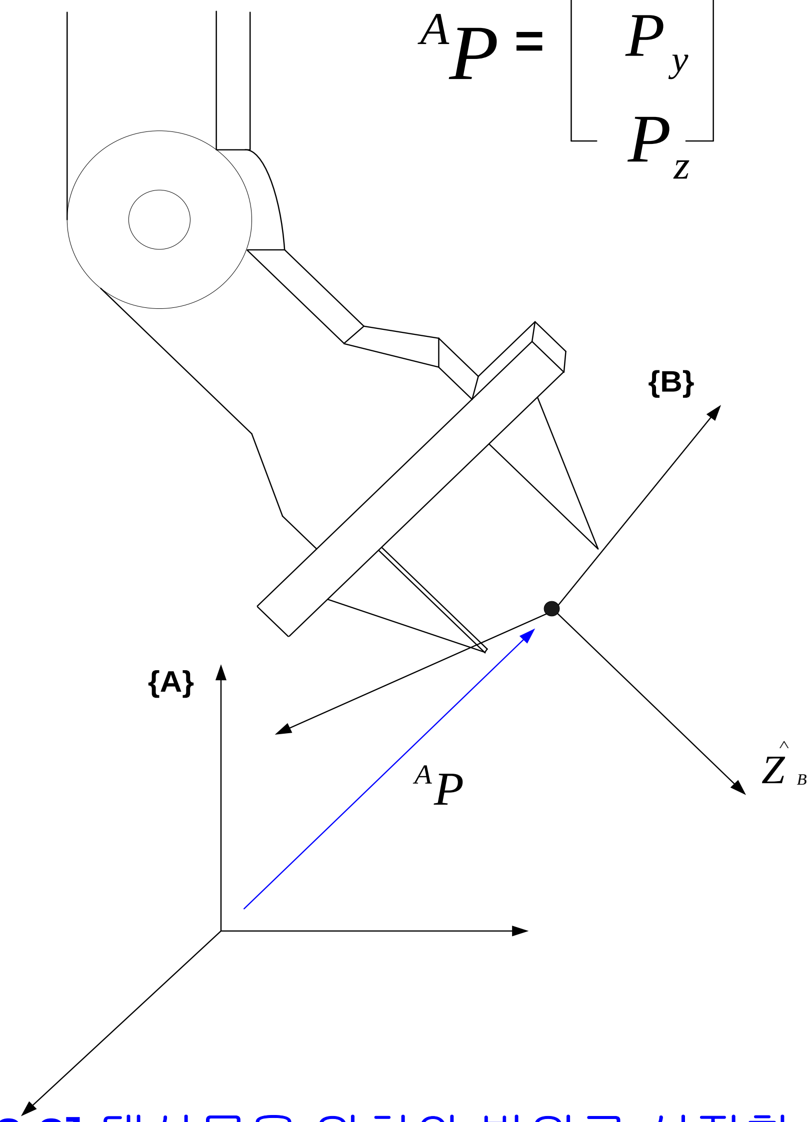
2. Description of an orientation

- 한 물체의 방위를 표시하기 위하여 그 물체에 좌표계를 부착하고 그 후에 이 좌표계를 기준 좌표계에 대하여 상대적인 표시를 한다.
- 물체에 부착된 좌표계 {B}를 나타내는 방법은 기준 좌표계 {A}에 대한 3주축의 단위 벡터를 적는 방법이 있다.
  - -. 좌표계 {B} 의 주축들을 나타내는 단위 벡터 : $\hat{X}_B, \hat{Y}_B, \hat{Z}_B$
  - -. 좌표계 {A} 의 방법으로 표현 : ${}^A\hat{X}_B \ {}^A\hat{Y}_B \ {}^A\hat{Z}_B$
- 회전행렬(rotation matrix) : ${}^A_B R$

$$
{}^A_B R = \left[{}^A\hat{X}_B \ \ {}^A\hat{Y}_B \ \ {}^A\hat{Z}_B \right] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
$$

(2.2)

$$ {}^{A}P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} $$



[그림2.2] 대상물을 위치와 방위로 설정함.

- 식 (2.2) 의 스칼라양 r_{ij} 에 대한 표현을 간단히 하면 ${}^{A}_{B}R$ 는

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \bullet \hat{X}_A & \hat{Y}_B \bullet \hat{X}_A & \hat{Z}_B \bullet \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \bullet \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \bullet \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \bullet \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \bullet \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \bullet \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \bullet \hat{Z}_A \end{bmatrix} \qquad (2.3) $$

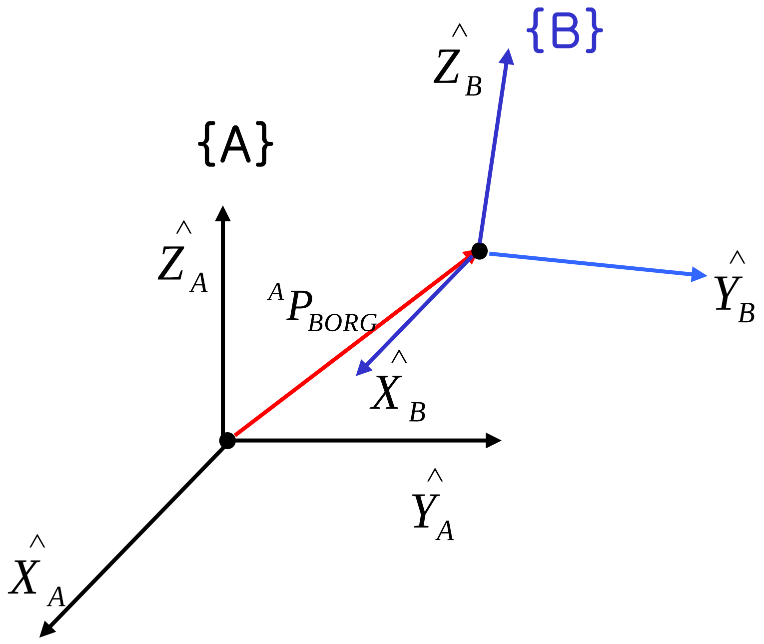
- 식 (2.3) 의 행렬의 열은 {A} 의 단위 벡터를 계 {B} 에서 표시한 것.

- ${}^{B}_{A}R$ 은 계 {A} 를 계 {B} 에 대하여 표시하는 것이 되므로 식 (2.3)의 전치행렬이 된다.

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_A^{T} \\ {}^{B}\hat{Y}_A^{T} \\ {}^{B}\hat{Z}_A^{T} \end{bmatrix} \qquad 즉 \qquad {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T} $$

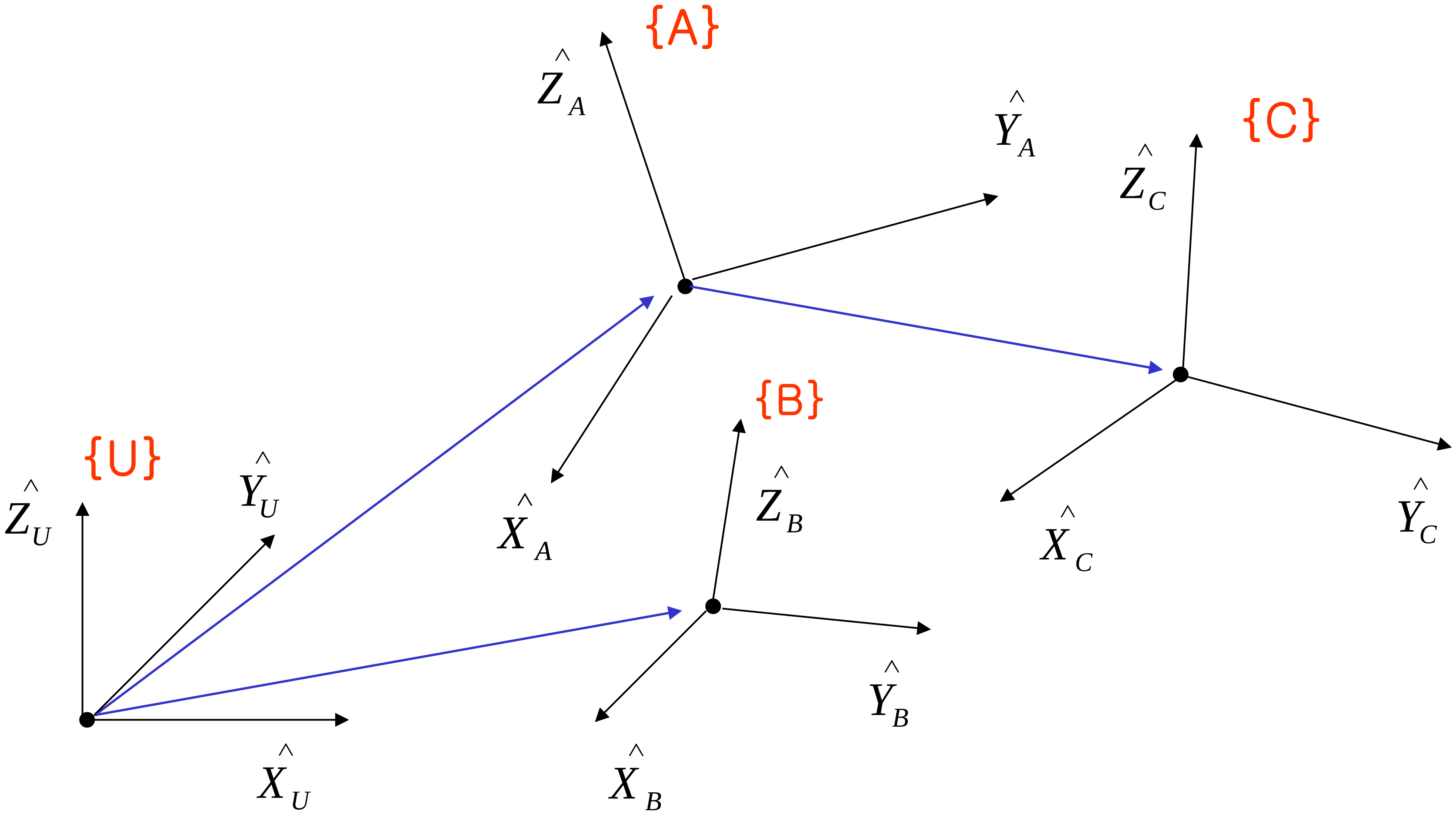
3. Description of a frame

- 위치와 방위정보를 주는 네 개 벡터의 조합으로 구성된 요소를 정하고 계(frame) 라고 부른다. (위치를 나타내는 벡터와 방위를 표시하기 위한 세 개의 벡터)
- 계는 방위에 추가하여 원점을 나타내는 다른 계에 기준한 위치 벡터를 갖고 있는 좌표계가 된다.
- 예를 들어 계 {B} 는 ${}_B^A R$ 과 ${}^A P_{BORG}$ 로 나타낸다.



$$\{B\} = \{{}_B^A R,\ {}^A P_{BORG}\}$$

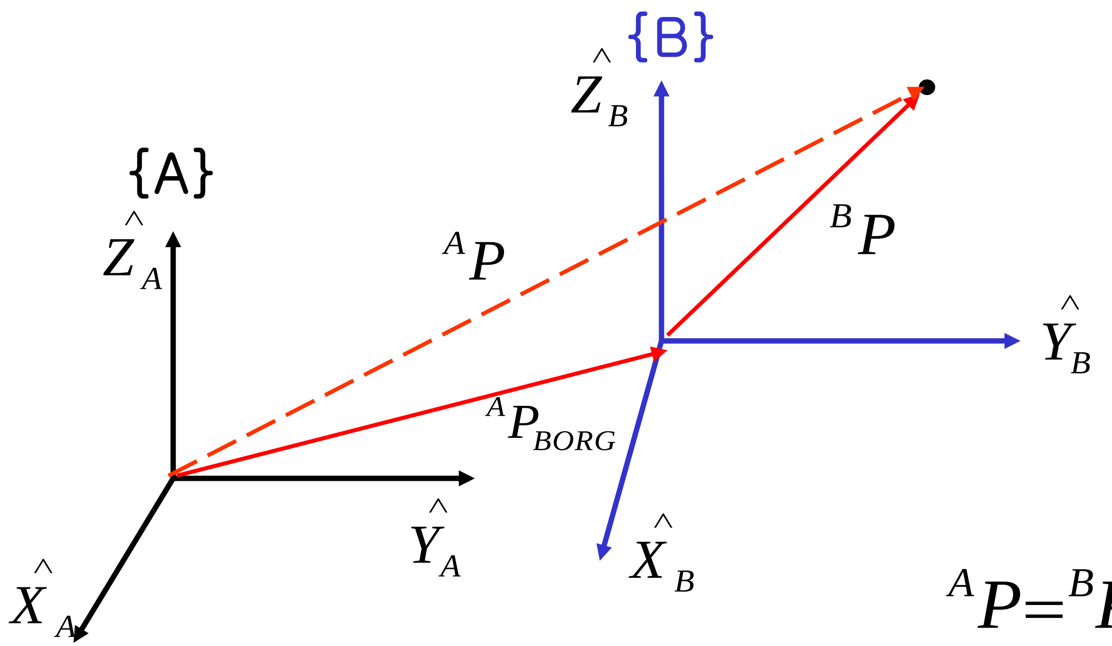
❖ 여러 가지 계의 예



{A}
{B}
{C}
{U}
$\hat{Z}_A$
$\hat{Y}_A$
$\hat{X}_A$
$\hat{Z}_C$
$\hat{X}_C$
$\hat{Y}_C$
$\hat{Z}_B$
$\hat{Y}_B$
$\hat{X}_B$
$\hat{Z}_U$
$\hat{Y}_U$
$\hat{X}_U$

3. Mappings
(changing descriptions from frame to frame)

1. Mappings involving translated frames



$$^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$

[그림 2.4] 전위된 매핑

- 벡터 ${}^{B}P$로 정의된 공간상의 점을 {B} 와 동일한 방위를 갖고 있는 계 {A} 에 관하여 표시하고자 한다.

- {B}는 {A}와 전위(translation)만큼 다르며, 이 전위는 {A} 계의 원점에서 {B} 의 원점의 위치를 나타내는 벡터인 ${}^{A}P_{BORG}$ 로 나타내어 진다.

$${}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$

- 2. Mappings involving rotated frames

  - 회전행렬의 열은 모두 단위 크기이고 또한 이들 단위 벡터들은 서로 직교한다.
  - 직교하고 단위 크기의 열을 갖고 있는 행렬의 역 행렬은 전치(transpose)행렬과 동일하다.

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} $$

  - ${}^{A}_{B}R$ 의 열들은 {A}에 기준한 {B}의 단위벡터 이고, ${}^{A}_{B}R$ 의 행들은 {B}에 기준한 {A}의 단위 벡터이다.
  - 회전행렬은 세 개의 행 벡터 또는 세 개의 열 벡터의 조합으로 해석할 수 있다.

$$ {}^{A}_{B}R = \left[{}^{A}\hat{X}_{B} \quad {}^{A}\hat{Y}_{B} \quad {}^{A}\hat{Z}_{B} \right] = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Y}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Z}_{A}^{T} \end{bmatrix} $$

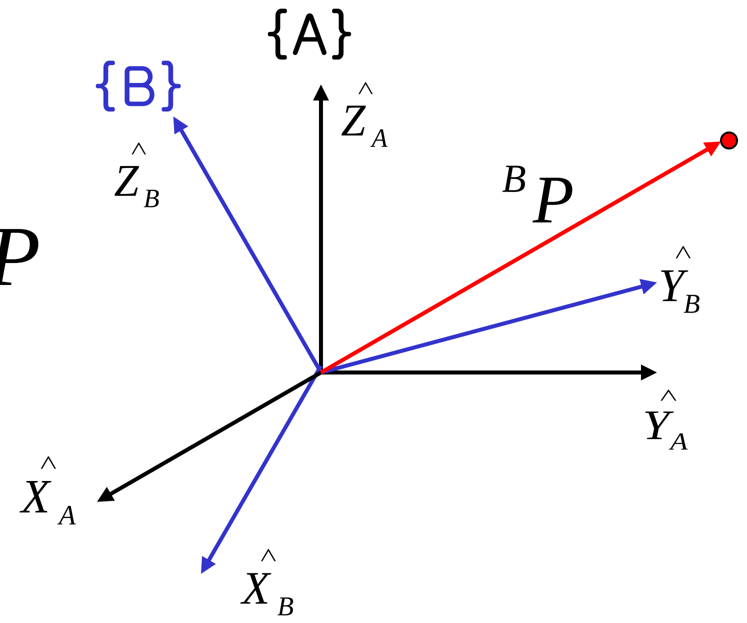
•그림[2.5]에서 두 계의 원점이 일치할 경우 계 {B}에 대하여 벡터의 정의를 알고 있을 때 , 다른 계 {A} 에 대한 그 벡터를 정의 할 수 있다.

•이 계산은 {B}의 방위 표현이 {A}에 관하여 알려 졌을 때 가능하다.

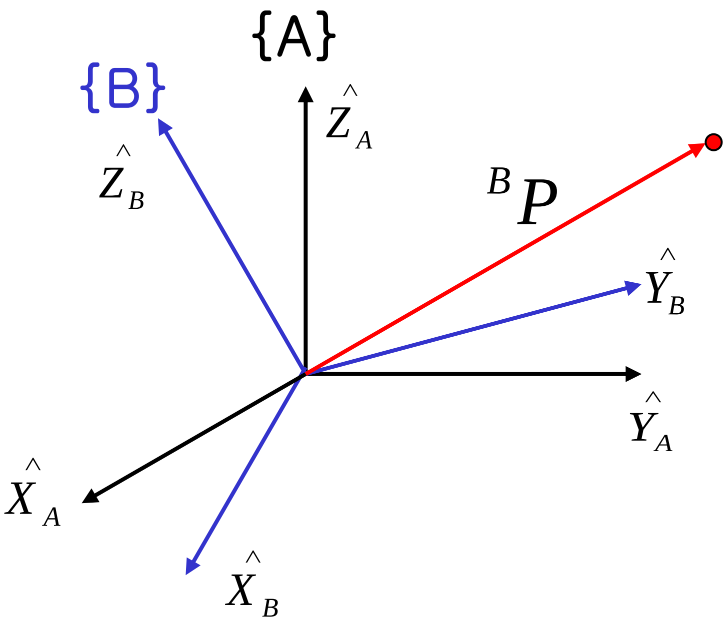
•이 방위는 회전행렬 ${}^{A}_{B}R$ 에 의해서 주어진다.

• ${}^{A}P$ 는 다음과 같이 계산 된다.

$$
\begin{aligned}
{}^{A}p_x &= {}^{B}\hat{X}_A \bullet {}^{B}P \\
{}^{A}p_y &= {}^{B}\hat{Y}_A \bullet {}^{B}P \\
{}^{A}p_z &= {}^{B}\hat{Z}_A \bullet {}^{B}P
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\;{}^{B}P
$$



회전 행렬 구하는 방법



$$^AP={}^A_BR\ {}^BP$$

$$(\hat{X}_A,\hat{Y}_A,\hat{Z}_A)=(\vec{i},\vec{j},\vec{k}),\quad (\hat{X}_B,\hat{Y}_B,\hat{Z}_B)=(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$$

$$^Bp=\left({}^Bp_x,\ {}^Bp_y,\ {}^Bp_z\right)^T=known$$

$$^Ap=\left({}^Ap_x,\ {}^Ap_y,\ {}^Ap_z\right)^T=?$$

$$^Ap_x=\vec{i}\bullet{}^Bp=\vec{i}\bullet({}^Bp_x\vec{i}'+{}^Bp_y\vec{j}'+{}^Bp_z\vec{k}')={}^Bp_x\vec{i}\bullet\vec{i}'+{}^Bp_y\vec{i}\bullet\vec{j}'+p_z\vec{i}\bullet\vec{k}')$$

$$^Ap_y=\vec{j}\bullet{}^Bp=\vec{j}\bullet({}^Bp_x\vec{i}'+{}^Bp_y\vec{j}'+{}^Bp_Z\vec{k}')={}^Bp_x\vec{j}\bullet\vec{i}'+{}^Bp_y\vec{j}\bullet\vec{j}'+p_z\vec{j}\bullet\vec{k}')$$

$$^Ap_z=\vec{k}\bullet{}^Bp=\vec{k}\bullet({}^Bp_x\vec{i}'+{}^Bp_y\vec{j}'+{}^Bp_Z\vec{k}')={}^Bp_x\vec{k}\bullet\vec{i}'+{}^Bp_y\vec{k}\bullet\vec{j}'+p_z\vec{k}\bullet\vec{k}')$$

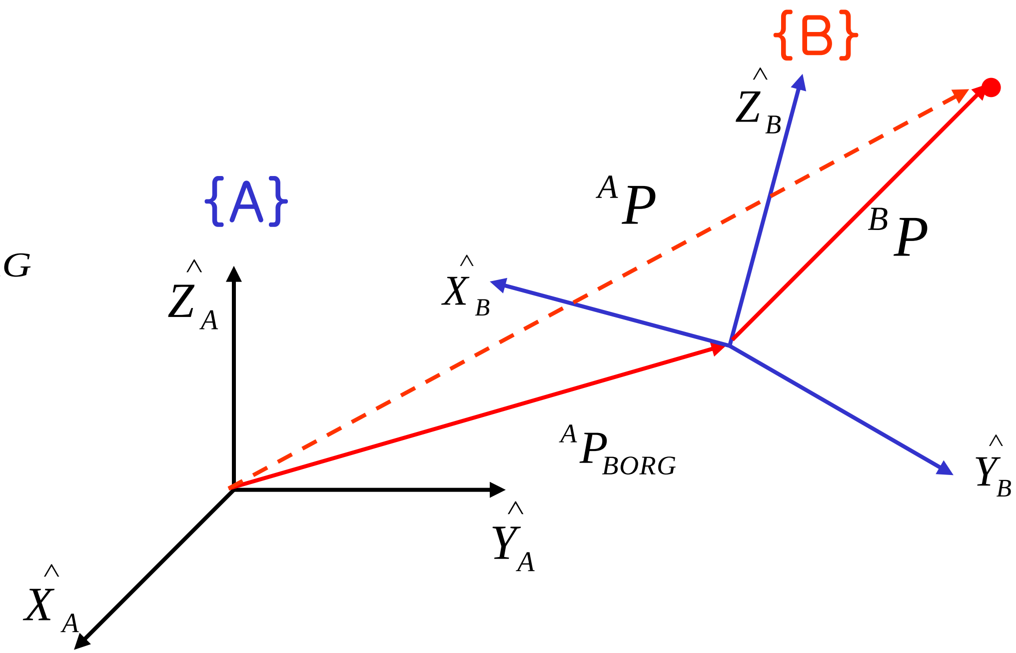
$$\begin{bmatrix}{}^Ap_x\\ {}^Ap_y\\ {}^Ap_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{i}\bullet\vec{i}' & \vec{i}\bullet\vec{j}' & \vec{i}\bullet\vec{k}'\\ \vec{j}\bullet\vec{i}' & \vec{j}\bullet\vec{j}' & \vec{j}\bullet\vec{k}'\\ \vec{k}\bullet\vec{i}' & \vec{k}\bullet\vec{j}' & \vec{k}\bullet\vec{k}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^Bp_x\\ {}^Bp_y\\ {}^Bp_z\end{bmatrix}$$

- 3. Mappings involving general frames

  - {B}의 원점에 위치하는 벡터를 ${}^{A}P_{BORG}$ 라고 부른다.
  - {B}가 {A}에 기준하여 회전한 양은 ${}^{A}_{B}R$ 로 표시 한다.
  - ${}^{B}P$ 가 주어졌을 때, ${}^{A}P$ 는 다음과 같다.

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\ {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$

(2.17)



- 위의 식은 한 계에서 다른 계로 벡터의 표시를 변환하는 일반적인 맵핑을 나타낸다.

- 한 계에서 다른 계로의 맵핑은 행렬 형태의 연산자로 생각.

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T \; {}^{B}P \qquad (2.18) $$

- 식 (2.17)식을 (2.18)식에 의하여 제안되는 행렬연산자 형식으로 표현하기 위하여 4*4 행렬 연산자를 정의하고, 4*1 위치 벡터를 사용하여 (2.18)을 다음과 같이 구성한다.

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0\;0\;0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ \hline 1 \end{bmatrix} \qquad (2.19) $$

- (2.19)식의 4*4 행렬은 균질행렬(homogeneous transform)이라고 부른다.

4. Operators
(translations, rotations, transformations)

- 1. Translational operators

  - 공간의 한 점을 주어진 벡터 방향으로 일정한 거리 만큼 움직이는 것이 전위이다.
  - 공간에서의 점을 실제로 전위 시키는 데는, 단지 한 개의 좌표시스템만이 필요하다.
  - 공간에서 점을 전위 시키는 것은 한 점을 다른 계로 맵핑 시키는 것과 같은 수학으로 이루어 진다.
  - [그림 2.9]는 어떻게 벡터 ${}^{A}P_1$이 벡터 ${}^{A}Q$ 에 의하여 전위되었는가를 보여준다.(벡터 ${}^{A}Q$ 는 이 전위를 수행하는 데 필요한 정보를 제공한다.)

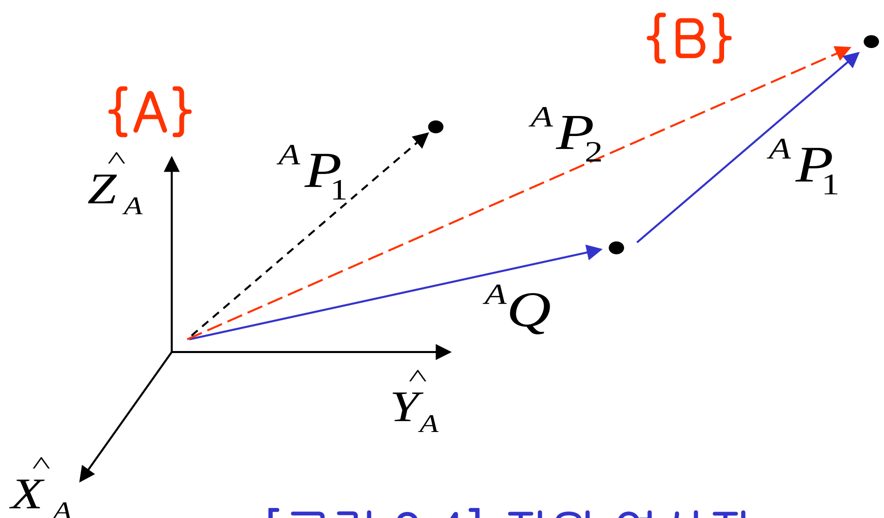
- 전위를 수행한 결과 새로운 벡터는 다음과 같다. ${}^{A}P_2 = {}^{A}P_1 + {}^{A}Q$
- 행렬 연산자로 전위를 수행하는 것을 나타내면 ${}^{A}P_2 = D_Q(q)\,{}^{A}P_1$이다.

(여기서 q 는 벡터 $\hat{Q}$ 의 방향으로 ± 부호를 가진 전위의 크기이다.)

- D_Q 라는 연산자는 다음의 간단한 형식의 균질 변환으로 생각할 수 있다.

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 여기서 q_x, q_y, q_z는 전위벡터 Q 의 성분이고, $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$ 이 된다.



[그림 2.4] 전위 연산자.

- 2. Rotational operators

  - 연산자로써 회전행렬이 나타나면 두계를 연결 시키는 것으로 보지 않기 때문에 , 상단이나 하단에 첨자가 나타나지 않는다.

$$ {}^{A}P_2 = R\ {}^{A}P_1 $$

  - 벡터를 R 만큼 회전시키는 회전행렬은, 기준계 관하여 R 만큼 회전된 계를 표시하기 위하여 사용되는 회전행렬과 동일하다.

  - 어떤 축이 회전축이 되는가를 명확히 지적하기 위하여 회전연산자의 다른 표기법을 정의한다. (“ $R_K(\Theta)$“는 $\hat{K}$ 축 주위로 Θ 만큼 회전을 수행하는 회전연산자 이다.)

$$ {}^{A}P_2 = R_K(\Theta)\ {}^{A}P_1 $$

  - 이 연산자는 위치 벡터 부분이 0인 균질변환으로 쓰여질 수도 있다.
  - 예를 들어 $\hat{K}$ 축 주위로 Θ 도 만큼 회전하는 연산자는 다음과 같다.

$$ R_Z(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- 3. Transformation operators

  - 계는 변환 연산자 (transformation operators)라는 해석은 단 한 개의 좌표 시스템이 사용 되며 T 의 기호는 상단이나 하단의 첨자가 없이 사용된다.
  - 연산자 T는 벡터 ${}^{A}P_2$를 계산한다. $${}^{A}P_2 = T\,{}^{A}P_1$$
  - R만큼 회전하고 Q만큼 전위하는 변환은 기준계에 대하여 R만큼 회전하고 Q만큼 전위하는 계를 표시하는 변환과 동일하다.

5. Summary of interpretations

- **균질변환의 세 가지 해석**

  1. 이것은 **<u>계의 표시</u>** 이다. ${}^{A}_{B}T$ 는 계 {A} 에 기준한 계 {B} 를 표시한다. 특히, ${}^{A}_{B}R$ 의 열은 {B}의 주축의 방향을 정의하는 단위 벡터이고, ${}^{A}P_{BORG}$ 는 {B}의 원점의 위치를 정한다.

  2. 이것은 **<u>변환매핑</u>** 이다. ${}^{A}_{B}T$ 는 ${}^{B}P$ 를 ${}^{A}P$ 로 맵핑한다.

  3. 이것은 **<u>변환연산자</u>** 이다. T 는 ${}^{A}P_1$ 에 작용하여 ${}^{A}P_2$를 생성한다.

6. Transformation arithmatic

- **1.Compound transformations**
  - [그림2.12]에서 ${}^{C}P$ 를 알고서 ${}^{A}P$ 를 구하기를 원한다.

$$ {}^{B}P = {}^{B}_{C}T\,{}^{C}P \quad (2.37) $$

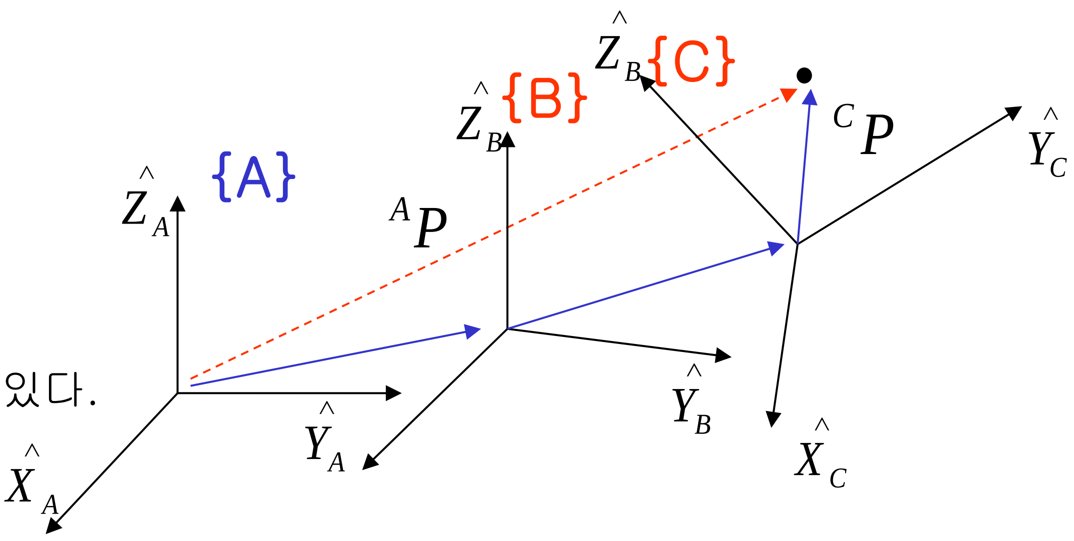
$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P \quad (2.38) $$

위의 두식을 결합하면

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}P $$

위의 결과에서 다음을 정의할 수 있다.

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T $$



- {B}와 {C}를 알고 있으므로 ${}^{A}_{C}T$ 의 표현을 나타낼 수 있다.

$$
{}^{A}_{C}T = \left[\begin{array}{c:c} {}^{A}_{B}R \quad {}^{B}_{C}R & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG} \\ \hdashline 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right]
$$

- 2. Inverting a transform

  - 계 {A}에 기준하여 알려진 계 {B} 즉, ${}^{A}_{B}T$ 의 값을 아는 계가 있을때 {B} 에 기준한 {A}의 표시 즉, ${}^{B}_{A}T$ 를 얻기 위하여 이변환의 역을 얻기를 원한다.
  - ${}^{B}_{A}T$ 를 발견하기 위하여, ${}^{A}_{B}R$ 과 ${}^{A}P_{BORG}$ 로부터 ${}^{B}_{A}R$ 과 ${}^{B}P_{AORG}$ 를 계산 해야 한다.

1) $${}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T}$$

2) $${}^{B}({}^{A}P_{BORG}) = {}^{B}_{A}R\ {}^{A}P_{BORG} + {}^{B}P_{AORG} = 0$$

위 식의 왼쪽이 0이 되어야 하므로,

$${}^{B}P_{AORG} = -{}^{B}_{A}R\ {}^{A}P_{BORG} = -{}^{A}_{B}R^{T}\ {}^{A}P_{BORG}$$

$${}^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{c:c} {}^{A}_{B}R^{T} & -{}^{A}_{B}R^{T}\ {}^{A}P_{BORG} \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right] = {}^{A}_{B}T^{-1}$$

7. Transform eqations

[그림2.14]는 계 {D}가 변환의 곱으로 표시될 수 있는 두 가지 다른 경우를 보인다.

1) $_{D}^{U}T = {}_{A}^{U}T \; {}_{D}^{A}T$

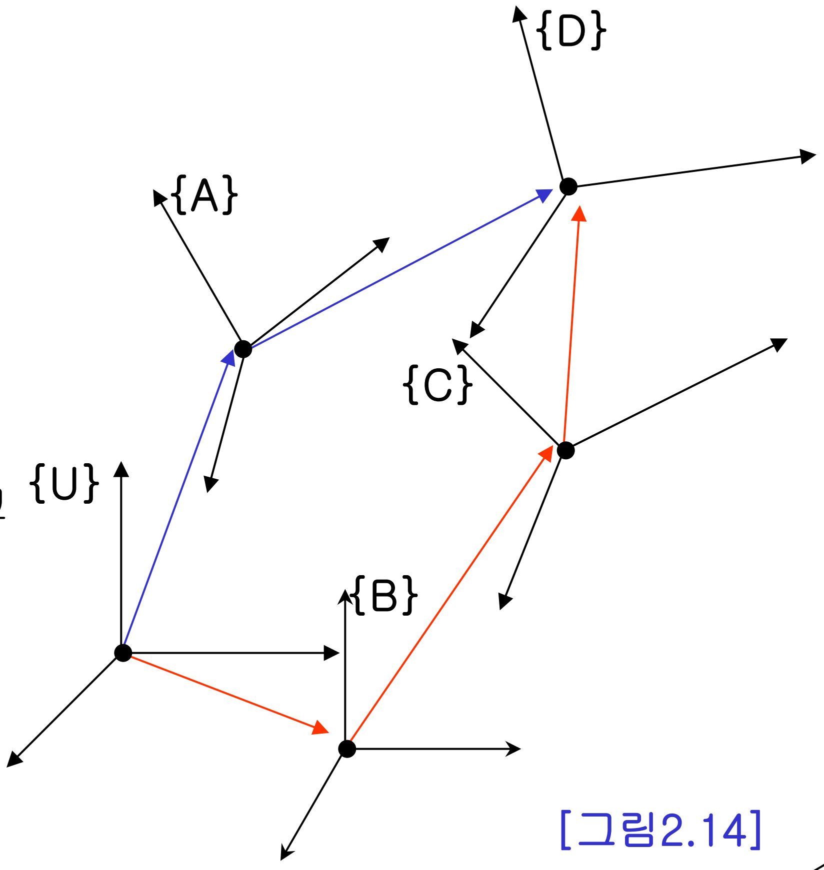
2) $_{D}^{U}T = {}_{B}^{U}T \; {}_{C}^{B}T \; {}_{D}^{C}T$

변환방정식을 만들기 위하여 이 두 가지 식을 같게 놓는다.

$$_{A}^{U}T \; {}_{D}^{A}T = {}_{B}^{U}T \; {}_{C}^{B}T \; {}_{D}^{C}T$$

만약 $_{C}^{B}T$를 제외하고 모든 변환이 알려 졌다고 하면 해는 다음과 같다.

$$_{C}^{B}T = {}_{B}^{U}T^{-1} \; {}_{A}^{U}T \; {}_{D}^{A}T \; {}_{D}^{C}T^{-1}$$



[그림2.14]

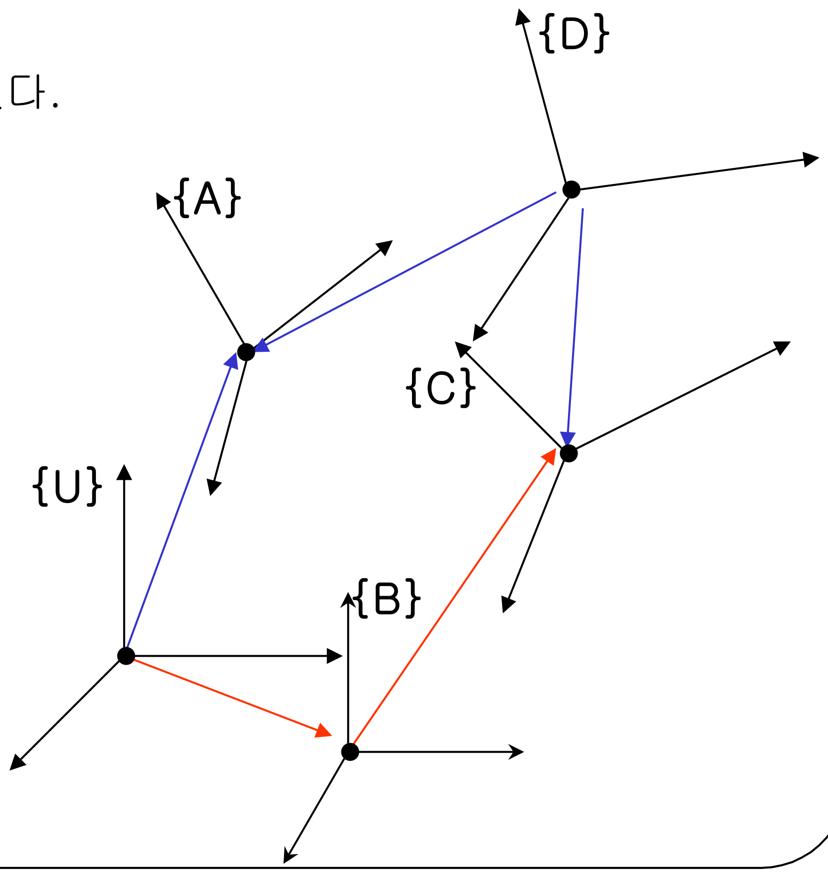
[그림 2.15]는 유사한 다른 경우를 나타내며 {C}의 가능한 두 가지 표시는 다음과 같다.

1) $^{U}_{C}T = ^{U}_{A}T \; ^{D}_{A}T^{-1} \; ^{D}_{C}T$

2) $^{U}_{C}T = ^{U}_{B}T \; ^{B}_{C}T$

위의 두 식을 같게 놓음으로써 $^{U}_{A}T$ 를 구할 수 있다.

$$^{U}_{A}T = ^{U}_{B}T \; ^{B}_{C}T \; ^{D}_{C}T^{-1} \; ^{D}_{A}T$$



8. More on representation of orientation

- 방위를 표시하는 방법으로 3*3 회전행렬 만을 사용.
- 회전행렬은 모든 열이 서로 수직이고 단위 크기를 가지고 있으며 그 행렬식의 값이 언제나 +1인 경우이다.
- 회전행렬은 고유 **정규직교행렬**(proper orthonormal matrices)이라고 한다.
- **정규직교행렬에 관한 Cayley 의 공식**[3] 의 결과에 의하여 어떤 3*3 회전행렬도 세 개의 파라미터만으로 표시할 수 있다.
- 회전행렬 R이 주어졌을 때, 요소 사이의 종속관계를 쉽게 나타낼 수 있다.

$$R = [\hat{X} \quad \hat{Y} \quad \hat{Z}] = [\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}]$$

- 행렬 9개의 요소에, 6개의 제한조건이 있다. (단위 벡터의 성질)

$$|\hat{X}| = 1 \qquad \hat{X} \bullet \hat{Y} = 0$$

$$|\hat{Y}| = 1 \qquad \hat{X} \bullet \hat{Z} = 0$$

$$|\hat{Z}| = 1 \qquad \hat{Y} \bullet \hat{Z} = 0$$

- 1. X-Y-Z fixed angles

  - 계 {B}의 방위를 표시하는 방법은 알려진 계 {A}와 일치하는 계로부터 시작한다.
  - 맨 처음에 {B}를 $\hat{X}_A$ 주위로 각도 γ 만큼 회전한 후, $\hat{Y}_A$ 주위로 각도β 만큼 회전하고, 그 후에 $\hat{Z}_A$ 주위로 α 만큼 회전한다.
  - $\hat{X}$ 축 주위로 γ 만큼 회전하는 것을 롤, $\hat{Y}$ 축 주위로 β 만큼 회전하는 것을 피치, $\hat{Z}$ 축 주위로 α 만큼 회전하는 것을 요우라고 부른다.
  - 등가의 회전행렬 ${}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)$ 는 모든 회전이 기준계의 축 주위에서 발생하므로, 간단하게 유도될 수 있다.
  - 회전의 순서는 롤 , 피치 , 요우 이다.

$$
{}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=R_Z(\alpha)\;R_Y(\beta)\;R_X(\gamma)
$$

$$
=\begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
{}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma-s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma+s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma+c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma-c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \qquad (2.64)
$$

- 회전행렬로부터 등가의 롤, 피치와 요우각을 역으로 계산하는 문제.
- (2.64)식을 주어진 회전행렬과 같도록 놓는다.

$$ {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

- 식(2.64)로 부터 $c\beta \neq 0$ 이면 β, α 와 γ 는 다음과 같다.

$$ \beta = A\tan 2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) $$

$$ \alpha = A\tan 2(r_{21}/c\beta,\ r_{11}/c\beta) $$

$$ \gamma = A\tan 2(r_{32}/c\beta,\ r_{33}/c\beta) $$

- 만약 $\beta = \pm 90.0$ 도이면 윗 식의 해는 구할 수 없다.따라서 $\alpha = 0.0$ 으로 선택하고 결과는 다음과 같다.

$$ \gamma = \pm A\tan 2(r_{12}, r_{22}) $$

$$ \beta = \pm 90.0 $$

(복호동순)

$$ \alpha = 0.0 $$

9. Transformation of free vectors

- 두 개의 벡터는 같은 차원, 같은 크기와 같은 방향을 가지고 있을 때 동등(equal)하다.
- 두 개의 벡터는 , 각각이 어떤 능력 안에서 유발하는 효과가 같으면, 이 능력 안에서 등가(equivalent)이다.
- 선 벡터(line vector)는 벡터의 효과가 작용선(line of action)에 따라 영향을 받는 방향과 크기를 가진 벡터를 지칭한다.
- 자유 벡터(free vector)는 크기와 방향이 보존되는 한, 벡터의 의미의 변화나 손상이 없이 공간상에서 어느 곳에든지 위치할 수 있는 벡터를 지칭한다.

10. Computatoinal considerations

- 변환이 수행되는 순서는, 같은 양을 계산하는 데 필요한 계산양의 많은 차를 나타낸다.
- ${}^{A}P={}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}_{D}R\,{}^{D}P$ 와 같이 벡터의 회전이 여러 번 수행 된다고 할 때

1) 세 회전행렬을 맨 처음에 곱하면

$${}^{A}P={}^{A}_{B}R \quad {}^{B}_{C}R \quad {}^{C}_{D}R \quad {}^{D}P$$

27 mul
18 add

27 mul
18 add

9 mul
6 add

❖**Total 63 mul, 42 add**

2) 한 번에 한 개씩 벡터를 행렬로 변환 하면

$${}^{A}P={}^{A}_{B}R \quad {}^{B}_{C}R \quad {}^{C}_{D}R \quad {}^{D}P$$

9 mul
6 add

9 mul
6 add

9 mul
6 add

❖**Total 27 mul, 18 add**