5 불 대수

학습목표

- 기본 논리식의 표현 방법을 알아본다.
- 불 대수의 법칙을 알아본다.
- 논리회로를 논리식으로 논리식을 논리회로로 표현하는 방법을 알아본다.
- 곱의 합(SOP)과 합의 곱(POS), 최소항(minterm)과 최대항(maxterm)에 대해 알아본다.

01. 기본 논리식의 표현
02. 불 대수 법칙
03. 논리회로의 논리식 변환
04. 논리식의 회로구성
05. 불 대수식의 표현 형태
06. 불 대수 법칙을 이용한 논리식의 간소화

01 기본 논리식의 표현

- 기본적인 불 대수식은 AND, OR, NOT을 이용하여 표현
- AND 식은 곱셈의 형식으로 표현하고, OR 식은 덧셈의 형식으로 표현
- NOT 식은 $\overline{X}$ 또는 X'로 표현
- 완전한 논리식은 입력 항목들의 상태에 따른 출력을 결정하는 식

X=0 and Y=1 일 때 출력을 1로 만들려는 경우 출력 논리식	$F = \overline{X}Y$
X=0 or Y=1 일 때 출력을 1로 만들려는 경우 출력 논리식	$F = \overline{X} + Y$
(X=0 and Y=1) or (X=1 and Y=0) 일 때 출력을 1로 만들려는 경우 출력 논리식	$F = \overline{X}Y + X\overline{Y}$

❑ 1입력 논리식, 2입력 논리식, 3입력 논리식

1입력 논리식

입력	출력
X	F
0	$F = \overline{X}$
1	$F = X$

2입력 논리식

입력		출력
X	Y	F
0	0	$F = \overline{X}\,\overline{Y}$
0	1	$F = \overline{X}\,Y$
1	0	$F = X\,\overline{Y}$
1	1	$F = X\,Y$

3입력 논리식

입력			출력
X	Y	Z	F
0	0	0	$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$
0	0	1	$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,Z$
0	1	0	$F = \overline{X}\,Y\,\overline{Z}$
0	1	1	$F = \overline{X}\,Y\,Z$
1	0	0	$F = X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$
1	0	1	$F = X\,\overline{Y}\,Z$
1	1	0	$F = X\,Y\,\overline{Z}$
1	1	1	$F = X\,Y\,Z$

01 기본 논리식의 표현

❖ 2입력 논리식 예

입력		출력
X	Y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F = \overline{X} + \overline{Y}$$

X=0 또는 Y=0일 때, 1을 출력하는 논리식

❖ 3입력 논리식 예

$$F = X + \overline{Y}Z$$

X=1이거나 (Y=0이고 Z=1)일 때, 1을 출력하는 논리식

입력							출력
X	Y	Z	X=1	$\overline{Y}$	Z	$\overline{Y}Z$	$X+\overline{Y}Z$
0	0	0		1			0
0	0	1		1	1	1	1
0	1	0					0
0	1	1			1		0
1	0	0	1	1			1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1				1
1	1	1	1		1		1

❑ 불 대수 공리(boolean Postulates)

P1	$X = 0$ or $X = 1$
P2	$0 \cdot 0 = 0$
P3	$1 \cdot 1 = 1$
P4	$0 + 0 = 0$
P5	$1 + 1 = 1$
P6	$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$
P7	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$

❑ 불 대수 기본 법칙

1. $X+0=0+X=X$	2. $X\cdot1=1\cdot X=X$	3. $X+1=1+X=1$
4. $X\cdot0=0\cdot X=0$	5. $X+X=X$	6. $X\cdot X=X$
7. $X+\overline{X}=1$	8. $X\cdot\overline{X}=0$	9. $\overline{\overline{X}}=X$

교환법칙(commutative law)

10. $X+Y=Y+X$	11. $XY=YX$

결합법칙(associate law)

12. $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$	13. $(XY)Z=X(YZ)$

분배법칙(distributive law)

14. $X(Y+Z)=XY+XZ$	15. $X+YZ=(X+Y)(X+Z)$

드모르간의 정리(De Morgan's theorem)

16. $\overline{X+Y}=\overline{X}\,\overline{Y}$	17. $\overline{XY}=\overline{X}+\overline{Y}$

흡수 법칙(absorptive law)

18. $X+XY=X$	19. $X(X+Y)=X$

합의의 정리(consensus theorem)

20. $XY+YZ+\overline{X}Z=XY+\overline{X}Z$	21. $(X+Y)(Y+Z)(\overline{X}+Z)=(X+Y)(\overline{X}+Z)$

❑ 진리표를 이용한 분배법칙 $X + YZ = (X+Y)(X+Z)$의 증명

X Y Z	좌측식		우측식		
	$Y \cdot Z$	$X+Y \cdot Z$	$X+Y$	$X+Z$	$(X+Y)(X+Z)$
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0
0 1 0	0	0	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1

동일한 결과

❑ 드모르간의 정리 증명

X Y	$X+Y$	좌측식 $\overline{X+Y}$	$\overline{X}$ $\overline{Y}$	우측식 $\overline{X}\,\overline{Y}$
0 0	0	1	1 1	1
0 1	1	0	1 0	0
1 0	1	0	0 1	0
1 1	1	0	0 0	0

동일한 결과

❑ 드모르간의 일반식

$$\overline{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} = \overline{X}_1 \overline{X}_2 \cdots \overline{X}_n$$

$$\overline{X_1 X_2 \cdots X_n} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \cdots + \overline{X}_n$$

❑ 합의의 정리 증명

입력			$XY + YZ + \overline{X}Z = XY + \overline{X}Z$						
X	Y	Z	XY	YZ	$\overline{X}Z$	$XY + YZ + \overline{X}Z$	XY	$\overline{X}Z$	$XY + \overline{X}Z$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1

동일한 결과

❑ 드모르간의 정리 예제

- $\overline{\overline{X+Y}+Z} = \overline{\overline{(X+Y)}}\,\overline{Z} = (X+Y)\overline{Z} = X\overline{Z}+Y\overline{Z}$
- $\overline{\overline{\overline{W}+X}+\overline{YZ}} = \overline{\overline{\overline{W}+X}}\cdot\overline{\overline{YZ}} = (\overline{W}+X)YZ = \overline{W}YZ+XYZ$
- $\overline{(A+B)\overline{C}\,\overline{D}+E+\overline{F}} = \overline{(A+B)\overline{C}\,\overline{D}}\cdot\overline{E}\cdot\overline{\overline{F}} = (\overline{A+B}+\overline{\overline{C}}+\overline{\overline{D}})\overline{E}\cdot F$

$$= (\overline{A}\,\overline{B}+C+D)\overline{E}\cdot F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E}F+C\overline{E}F+D\overline{E}F$$

- $\overline{\overline{AB}(CD+\overline{E}F)(\overline{AB}+\overline{CD})} = \overline{\overline{AB}}+\overline{(CD+\overline{E}F)}+\overline{(\overline{AB}+\overline{CD})}$

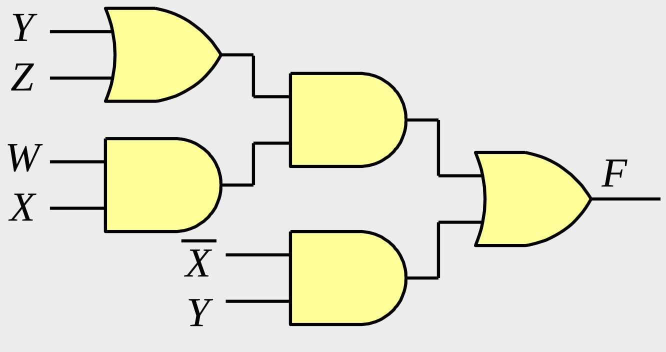
$$= AB+(\overline{CD}\cdot\overline{\overline{E}F})+\overline{\overline{AB}}\cdot\overline{\overline{CD}}$$

$$= AB+(\overline{C}+\overline{D})(E+\overline{F})+ABCD$$

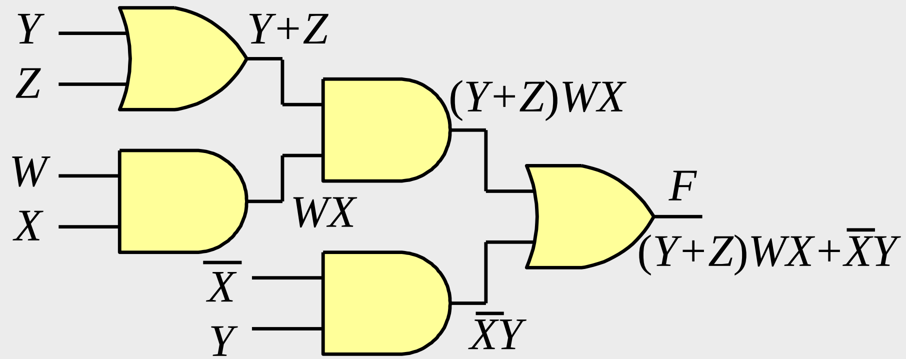
$$= AB+\overline{C}E+\overline{C}\,\overline{F}+\overline{D}E+\overline{D}\,\overline{F}+ABCD$$

❖ 원래의 회로에 게이트를 거칠 때마다 게이트의 출력을 적어주면서 한 단계씩 출력 쪽으로 나아가면 된다.

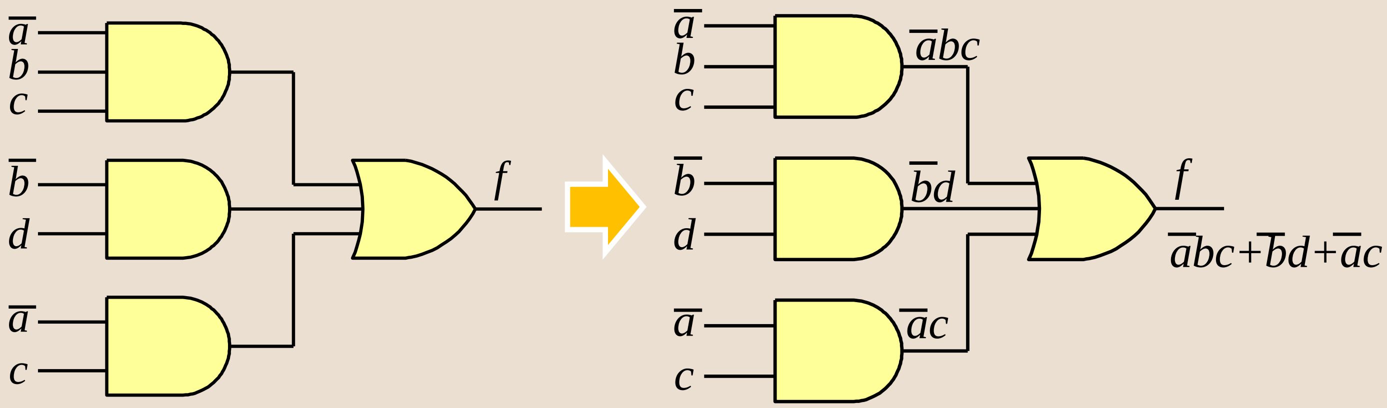
논리회로



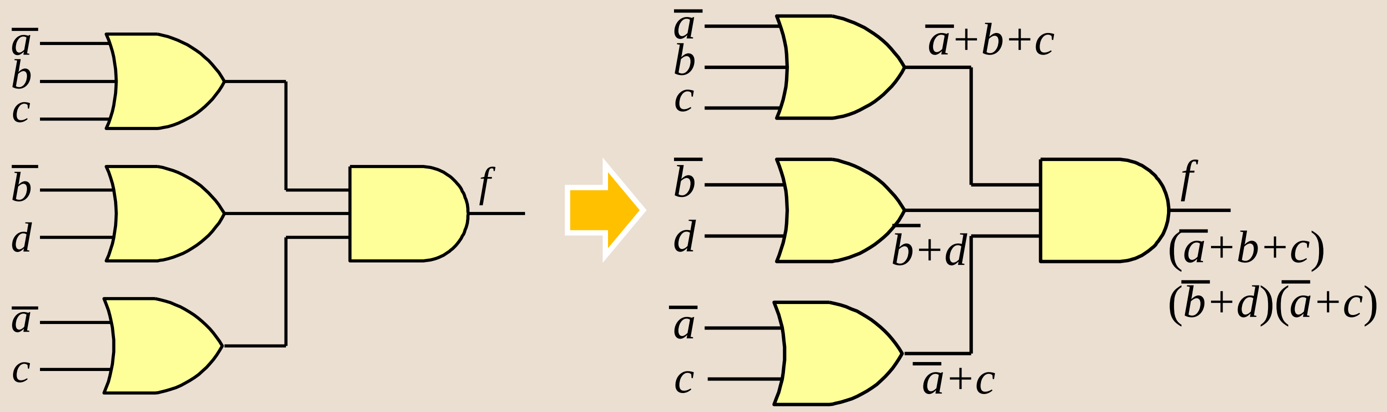
논리식 유도 과정



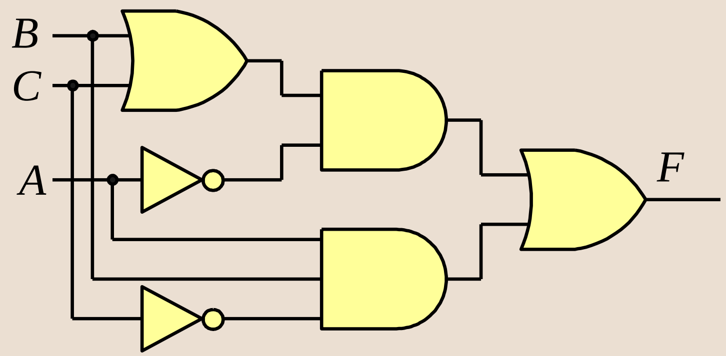
예 1

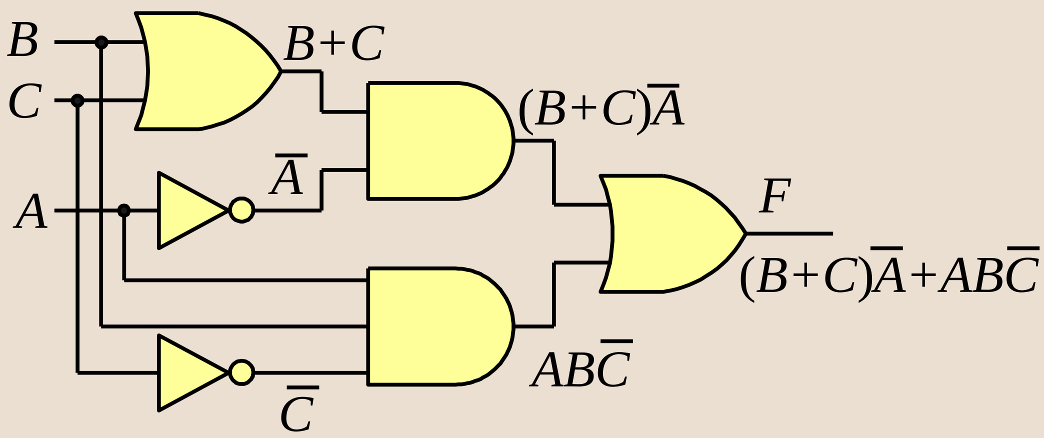

$\overline{a}$
b
c
$\overline{b}$
d
$\overline{a}$
c
f
$\overline{a}bc$
$\overline{b}d$
$\overline{a}c$
$\overline{a}bc+\overline{b}d+\overline{a}c$

예 2


$\overline{a}$
b
c
$\overline{b}$
d
$\overline{a}$
c
f
$\overline{a}+b+c$
$\overline{b}+d$
$\overline{a}+c$
$(\overline{a}+b+c)$
$(\overline{b}+d)(\overline{a}+c)$

예 3


B
C
A
F

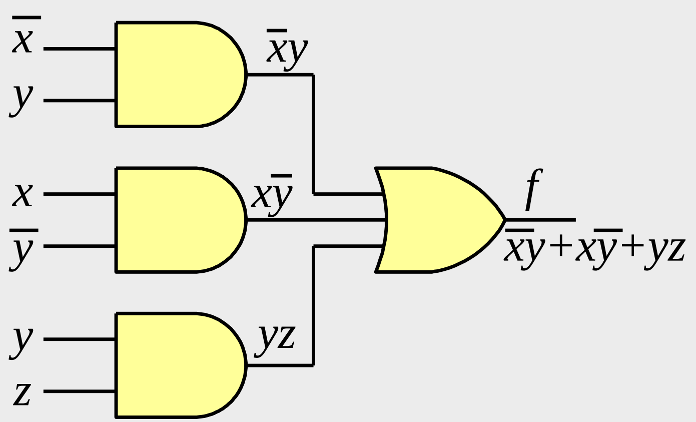

B
C
A
$B+C$
$(B+C)\overline{A}$
$\overline{A}$
F
$(B+C)\overline{A}+AB\overline{C}$
$AB\overline{C}$
$\overline{C}$

04 논리식의 회로 구성

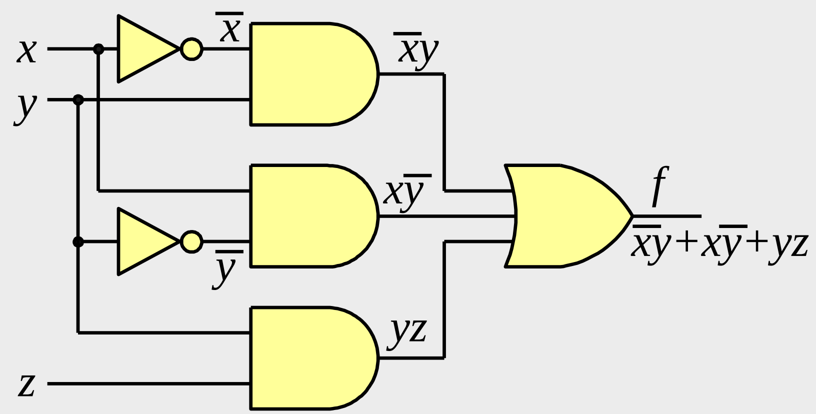
❖ AND, OR, NOT을 이용하여 논리식으로부터 회로를 구성.(AND-OR로 구성된 회로)

$$\bar{x}y + x\bar{y} + yz$$

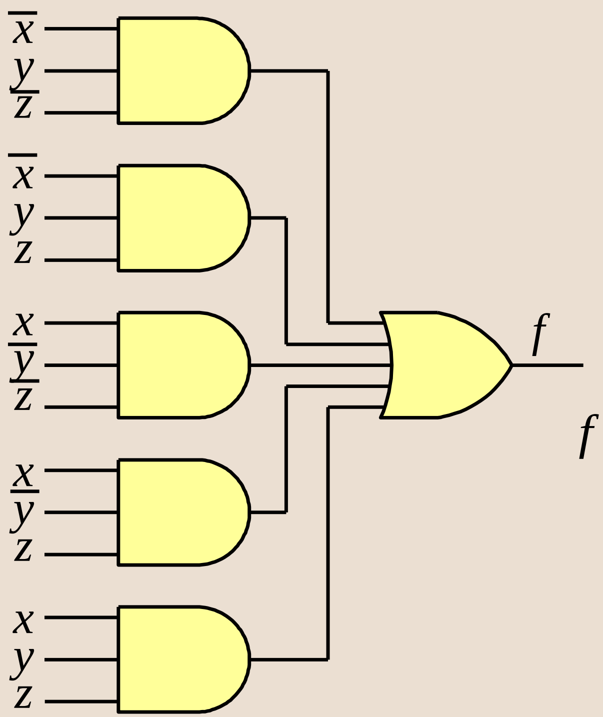
보수입력 사용



NOT 게이트 사용

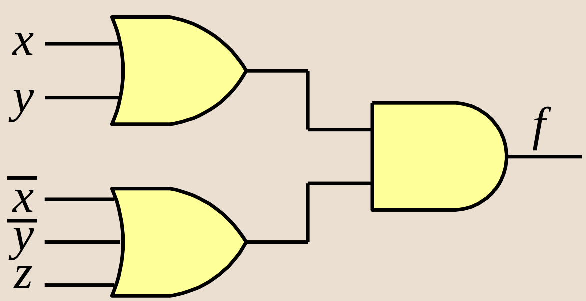


AND-OR



$$f(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz$$

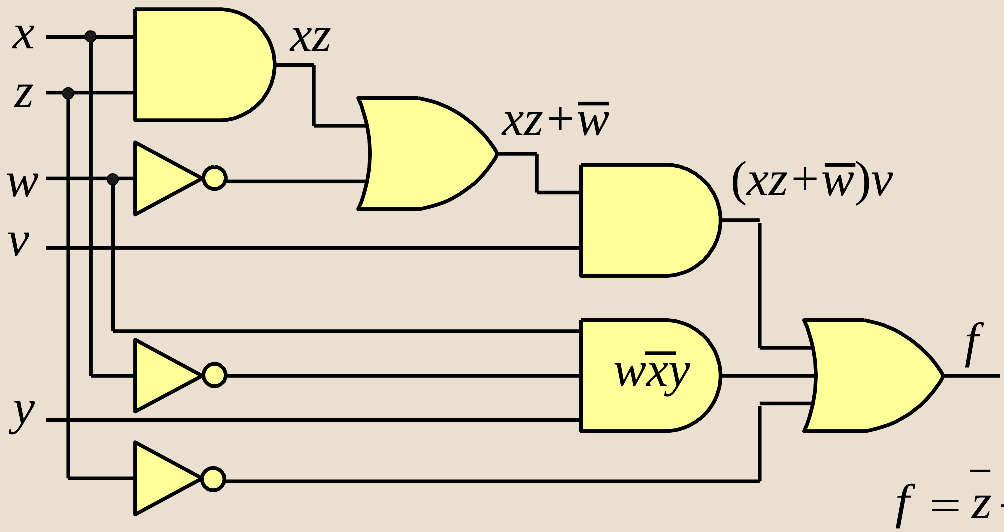
OR-AND



$$f = (x+y)(\bar{x}+\bar{y}+z)$$

04 논리식의 회로 구성

다단계
논리회로

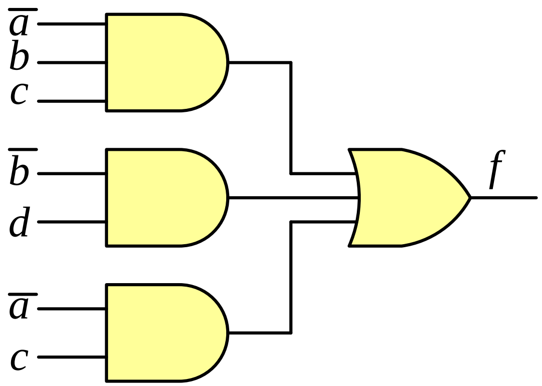


$$f = \overline{z} + w\overline{x}y + v(xz + \overline{w})$$

1. 곱의 합과 최소항

❑ 곱의 합(Sum of Product, SOP)

❖ SOP의 구성은 1 단계는 AND항(곱의 항, product term)으로 구성되고, 2 단계는 OR항(합의 항, sum term)으로 만들어진 논리식.



$$f = \bar{a}bc + \bar{b}d + \bar{a}c$$

❑ 최소항(Minterm)

❖ 최소항 : 표준 곱의 항

❖ 표준 곱의 항이란 함수에 모든 변수를 포함하고 있음.

$\overline{W}XY\overline{Z}$ $\quad$ $WXYZ$ ⟵ minterm

$W\overline{X}Y$ $\quad$ $\overline{W}X\overline{Z}$ ⟵ Non minterm

❑ 진리표로부터 최소항식을 표현하는 방법

입력		출력
a	b	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1. (a=0 AND b=1) OR (a=1 AND b=0) OR (a=1 AND b=1) 일 때, f = 1이다.

2. ($\bar{a}=1$ AND b=1) OR (a=1 AND $\bar{b}=1$) OR (a=1 AND b=1) 일 때, f = 1이다.

$\bar{a}b=1$ OR $a\bar{b}=1$ OR $ab=1$ 일 때, f = 1이다.

$$f=\bar{a}b+a\bar{b}+ab$$

2변수 최소항의 표현 방법

a	b	최소항	기호 / F
0	0	$\bar{a}\,\bar{b}$	M_0 / 0
0	1	$\bar{a}\,b$	M_1 / 1
1	0	$a\,\bar{b}$	m_2 / 1
1	1	$a\,b$	m_3 / 1

$$f(a,b) = \bar{a}b + a\bar{b} + ab$$
$$= m_1 + m_2 + m_3$$
$$= \sum m(1, 2, 3)$$

❑ 3변수 최소항의 표현 방법

$a\ b\ c$	최소항	기호
0 0 0	$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$	m_0
0 0 1	$\bar{a}\,\bar{b}\,c$	m_1
0 1 0	$\bar{a}\,b\,\bar{c}$	m_2
0 1 1	$\bar{a}\,b\,c$	m_3
1 0 0	$a\,\bar{b}\,\bar{c}$	m_4
1 0 1	$a\,\bar{b}\,c$	m_5
1 1 0	$a\,b\,\bar{c}$	m_6
1 1 1	$a\,b\,c$	m_7

❑ 3변수 최소항의 표현 방법

xyz	f	최소항	기호
0 0 0	1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	m_0
0 0 1	1	$\bar{x}\bar{y}z$	m_1
0 1 0	0	$\bar{x}y\bar{z}$	m_2
0 1 1	1	$\bar{x}yz$	m_3
1 0 0	0	$x\bar{y}\bar{z}$	m_4
1 0 1	1	$x\bar{y}z$	m_5
1 1 0	0	$xy\bar{z}$	m_6
1 1 1	1	xyz	m_7

$$f(x,y,z) = \sum m(0,1,3,5,7)$$
$$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz$$

$$\overline{f}(x,y,z) = \sum m(2,4,6)$$
$$= \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}$$

$$f(x,y,z) = \sum m(0,1,3,5,7) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz$$
$$= \overline{\overline{f}}(x,y,z) = \overline{\sum m(2,4,6)} = \overline{\bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}}$$

$$\overline{f}(x,y,z) = \sum m(2,4,6) = \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}$$
$$= \overline{\sum m(0,1,3,5,7)} = \overline{\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz}$$

예제 5-1 다음 진리표를 이용하여 f와 $\overline{f}$를 최소항식으로 나타내어라.

$a\ b\ c$	f	$\overline{f}$
0 0 0	0	1
0 0 1	1	0
0 1 0	1	0
0 1 1	1	0
1 0 0	1	0
1 0 1	1	0
1 1 0	0	1
1 1 1	0	1

$$f(a,b,c) = \sum m(1, 2, 3, 4, 5)$$
$$= \overline{a}\,\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc + a\overline{b}\,\overline{c} + a\overline{b}c$$

$$\overline{f}(a,b,c) = \sum m(0, 6, 7)$$
$$= \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + ab\overline{c} + abc$$

❑ 4변수 최소항의 표현 방법

$a\ b\ c\ d$	최소항	기호	$a\ b\ c\ d$	최소항	기호
0 0 0 0	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	m_0	1 0 0 0	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	m_8
0 0 0 1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	m_1	1 0 0 1	$a\bar{b}\bar{c}d$	m_9
0 0 1 0	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$	m_2	1 0 1 0	$a\bar{b}c\bar{d}$	m_{10}
0 0 1 1	$\bar{a}\bar{b}cd$	m_3	1 0 1 1	$a\bar{b}cd$	m_{11}
0 1 0 0	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	m_4	1 1 0 0	$ab\bar{c}\bar{d}$	m_{12}
0 1 0 1	$\bar{a}b\bar{c}d$	m_5	1 1 0 1	$ab\bar{c}d$	m_{13}
0 1 1 0	$\bar{a}bc\bar{d}$	m_6	1 1 1 0	$abc\bar{d}$	m_{14}
0 1 1 1	$\bar{a}bcd$	m_7	1 1 1 1	$abcd$	m_{15}

[Example]

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0, 1, 5, 9, 11, 15)$$
$$= \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd + abcd$$

2. 합의 곱과 최대항

- 합의 곱 구성 : 1 단계는 OR항(합의 항, sum term)으로 구성되고, 2 단계는 AND항(곱의 항, product term)으로 만들어진 논리식.
- 모든 변수를 포함하는 OR항을 맥스텀(maxterm) 또는 최대항이라 한다.

최대항의 예	$\overline{w}+x+y+\overline{z}$ $w+x+y+z$
합의 곱의 예	$(w+x)(w+y)$ $w(w+y)$ w $w+x$ $(\overline{w}+x+y+\overline{z})(w+x+y+z)$

❑ 최대항 표현 방법

$a\ b$	최대항	기호
0 0	$a+b$	M_0
0 1	$a+\overline{b}$	M_1
1 0	$\overline{a}+b$	M_2
1 1	$\overline{a}+\overline{b}$	M_3

2변수인 경우

$a\ b\ c$	최대항	기호
0 0 0	$a+b+c$	M_0
0 0 1	$a+b+\overline{c}$	M_1
0 1 0	$a+\overline{b}+c$	M_2
0 1 1	$a+\overline{b}+\overline{c}$	M_3
1 0 0	$\overline{a}+b+c$	M_4
1 0 1	$\overline{a}+b+\overline{c}$	M_5
1 1 0	$\overline{a}+\overline{b}+c$	M_6
1 1 1	$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$	M_7

3변수인 경우

$abcd$	최대항	기호	$abcd$	최대항	기호
0 0 0 0	$a+b+c+d$	M_0	1 0 0 0	$\bar{a}+b+c+d$	M_8
0 0 0 1	$a+b+c+\bar{d}$	M_1	1 0 0 1	$\bar{a}+b+c+\bar{d}$	M_9
0 0 1 0	$a+b+\bar{c}+d$	M_2	1 0 1 0	$\bar{a}+b+\bar{c}+d$	M_{10}
0 0 1 1	$a+b+\bar{c}+\bar{d}$	M_3	1 0 1 1	$\bar{a}+b+\bar{c}+\bar{d}$	M_{11}
0 1 0 0	$a+\bar{b}+c+d$	M_4	1 1 0 0	$\bar{a}+\bar{b}+c+d$	M_{12}
0 1 0 1	$a+\bar{b}+c+\bar{d}$	M_5	1 1 0 1	$\bar{a}+\bar{b}+c+\bar{d}$	M_{13}
0 1 1 0	$a+\bar{b}+\bar{c}+d$	M_6	1 1 1 0	$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+d$	M_{14}
0 1 1 1	$a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$	M_7	1 1 1 1	$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$	M_{15}

4변수인 경우

05 불 대수식의 표현 형태

[Example]

$$
\begin{aligned}
f(a,b) &= (a+b)(a+\overline{b})(\overline{a}+b) \\
&= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \\
&= \prod M(0, 1, 2)
\end{aligned}
$$

입력		출력
a	b	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

예제 5-2 다음 최대항 식을 진리표로 만들어 보고, 논리식을 구해보아라.

$$f(x,y,z)=\prod M(0,1,3,5,7)$$

$x\,y\,z$	f	최대항	기호
0 0 0	0	$x+y+z$	M_0
0 0 1	0	$x+y+\overline{z}$	M_1
0 1 0	1	$x+\overline{y}+z$	M_2
0 1 1	0	$x+\overline{y}+\overline{z}$	M_3
1 0 0	1	$\overline{x}+y+z$	M_4
1 0 1	0	$\overline{x}+y+\overline{z}$	M_5
1 1 0	1	$\overline{x}+\overline{y}+z$	M_6
1 1 1	0	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$	M_7

$$f(x,y,z)=\prod M(0,1,3,5,7)$$
$$=(x+y+z)(x+y+\overline{z})(x+\overline{y}+\overline{z})(\overline{x}+y+\overline{z})(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$$

3. 최소항과 최대항과의 관계

- 최소항은 출력이 1인 항을 SOP로 나타낸 것이고, 최대항은 출력이 0인 항을 POS로 나타낸 것이다.
- 최소항과 최대항은 반대의 성질을 가진다.

$a\ b\ c$	f	$\overline{f}$	최소항	기호	최대항	기호	관계
0 0 0	0	1	$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$	m_0	$a+b+c$	M_0	$M_0 = \overline{m_0}$
0 0 1	1	0	$\overline{a}\,\overline{b}\,c$	m_1	$a+b+\overline{c}$	M_1	$M_1 = \overline{m_1}$
0 1 0	1	0	$\overline{a}\,b\,\overline{c}$	m_2	$a+\overline{b}+c$	M_2	$M_2 = \overline{m_2}$
0 1 1	1	0	$\overline{a}\,b\,c$	m_3	$a+\overline{b}+\overline{c}$	M_3	$M_3 = \overline{m_3}$
1 0 0	1	0	$a\,\overline{b}\,\overline{c}$	m_4	$\overline{a}+b+c$	M_4	$M_4 = \overline{m_4}$
1 0 1	1	0	$a\,\overline{b}\,c$	m_5	$\overline{a}+b+\overline{c}$	M_5	$M_5 = \overline{m_5}$
1 1 0	0	1	$a\,b\,\overline{c}$	m_6	$\overline{a}+\overline{b}+c$	M_6	$M_6 = \overline{m_6}$
1 1 1	0	1	$a\,b\,c$	m_7	$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$	M_7	$M_7 = \overline{m_7}$

$$f(a,b,c)=\sum m(1,2,3,4,5)=\overline{a}\,\overline{b}c+\overline{a}b\overline{c}+\overline{a}bc+a\overline{b}\,\overline{c}+a\overline{b}c$$

$$=\overline{\overline{\overline{a}\,\overline{b}c+\overline{a}b\overline{c}+\overline{a}bc+a\overline{b}\,\overline{c}+a\overline{b}c}}=\overline{\overline{\overline{a}\,\overline{b}c}\cdot\overline{\overline{a}b\overline{c}}\cdot\overline{\overline{a}bc}\cdot\overline{a\overline{b}\,\overline{c}}\cdot\overline{a\overline{b}c}}$$

$$=\overline{(a+b+\overline{c})(a+\overline{b}+c)(a+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}+b+c)(\overline{a}+b+\overline{c})}$$

$$=\overline{\prod M(1,2,3,4,5)}$$

$$f(a,b,c)=\sum m(1,2,3,4,5)=\overline{\prod M(1,2,3,4,5)}$$
$$=\prod M(0,6,7)=\overline{\sum m(0,6,7)}$$

최소항을 부정하면
최대항

최대항을 부정하면
최소항

$$\overline{f}(a,b,c)=\sum m(0,6,7)=\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}+ab\overline{c}+abc$$

$$=\overline{\overline{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}+ab\overline{c}+abc}}=\overline{\overline{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}}\cdot\overline{ab\overline{c}}\cdot\overline{abc}}=\overline{(a+b+c)(\overline{a}+\overline{b}+c)(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})}$$

$$=\overline{\prod M(0,6,7)}$$

$$\overline{f}(a,b,c)=\sum m(0,6,7)=\overline{\prod M(0,6,7)}$$
$$=\prod M(1,2,3,4,5)=\overline{\sum m(1,2,3,4,5)}$$

❑ (1)식을 간소화하는 과정

(1) $\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz$

(2) $\bar{x}y + x\bar{y} + xyz$

(3) $\bar{x}y + x\bar{y} + xz$

(4) $\bar{x}y + x\bar{y} + yz$

$$\begin{aligned}
&\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz + \bar{x}yz \\
&= (\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz) + (x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z) + (xyz + \bar{x}yz) \\
&= \bar{x}y(\bar{z} + z) + x\bar{y}(\bar{z} + z) + yz(x + \bar{x}) \\
&= \bar{x}y \cdot 1 + x\bar{y} \cdot 1 + yz \cdot 1 \\
&= \bar{x}y + x\bar{y} + yz
\end{aligned}$$

$X+X=X$를 이용

$$\begin{aligned}
&\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz \\
&= (\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz) + (x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z) + xyz \\
&= \bar{x}y(\bar{z} + z) + x\bar{y}(\bar{z} + z) + xyz \\
&= \bar{x}y \cdot 1 + x\bar{y} \cdot 1 + xyz \\
&= \bar{x}y + x\bar{y} + xyz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz + x\bar{y}z \\
&= (\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz) + (x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z) + (xyz + x\bar{y}z) \\
&= \bar{x}y(\bar{z} + z) + x\bar{y}(\bar{z} + z) + xz(y + \bar{y}) \\
&= \bar{x}y \cdot 1 + x\bar{y} \cdot 1 + xz \cdot 1 \\
&= \bar{x}y + x\bar{y} + xz
\end{aligned}$$

$X+X=X$를 이용

❑ (2)식을 간소화하는 과정

(1) $\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz$

(2) $\bar{x}y + x\bar{y} + xyz$

(3) $\bar{x}y + x\bar{y} + xz$

(4) $\bar{x}y + x\bar{y} + yz$

분배법칙 적용

$$a + ab = (a+\bar{a})(a+b) = 1\cdot(a+b) = a+b$$
$$a(\bar{a}+b) = a\bar{a} + ab = 0 + ab = ab$$

$$\bar{x}y + x\bar{y} + xyz = \bar{x}y + x(\bar{y}+yz) = \bar{x}y + x(\bar{y}+y)(\bar{y}+z)$$
$$= \bar{x}y + x\cdot 1(\bar{y}+z) = \bar{x}y + x\bar{y} + xz$$

$$\bar{x}y + x\bar{y} + xyz = y(\bar{x}+xz) + x\bar{y} = y(\bar{x}+x)(\bar{x}+z) + x\bar{y}$$
$$= y\cdot 1(\bar{x}+z) + x\bar{y} = \bar{x}y + yz + x\bar{y}$$

예제 5-3 논리식 $\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c}$를 간소화하여라.

$$
\begin{aligned}
&\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c} \\
&=(\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b\bar{c})+\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c}=\bar{a}\bar{c}(\bar{b}+b)+\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c} \\
&=\bar{a}\bar{c}+\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c}=\bar{a}(\bar{c}+bc)+a\bar{b}\bar{c} \\
&=\bar{a}(\bar{c}+b)(\bar{c}+c)+a\bar{b}\bar{c}=\bar{a}(\bar{c}+b)+a\bar{b}\bar{c} \\
&=\bar{a}\bar{c}+\bar{a}b+a\bar{b}\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b \\
&=\bar{c}(\bar{a}+a\bar{b})+\bar{a}b=\bar{c}(\bar{a}+\bar{b})+\bar{a}b \\
&=\bar{c}\bar{a}+\bar{c}\bar{b}+\bar{a}b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c} \\
&=\bar{a}\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+\bar{a}bc \\
&=\bar{b}\bar{c}(\bar{a}+a)+\bar{a}b(\bar{c}+c) \\
&=\bar{b}\bar{c}+\bar{a}b
\end{aligned}
$$

❑ 간소화하는 과정 예

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \sum m(0,1,3,5,7) \\
&= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}yz + x\overline{y}z + xyz \\
&= \overline{x}\,\overline{y}(\overline{z} + z) + \overline{x}z(\overline{y} + y) + xz(\overline{y} + y) \\
&= \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}z + xz \\
&= \overline{x}\,\overline{y} + z(\overline{x} + x) \\
&= \overline{x}\,\overline{y} + z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{f}(x,y,z) &= \overline{\sum m(0,1,3,5,7)} = \sum m(2,4,6) \\
&= \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} \\
&= y\overline{z}(\overline{x} + x) + x\overline{z}(\overline{y} + y) \\
&= y\overline{z} + x\overline{z}
\end{aligned}
$$

예제 5-4 다음 진리표를 보고 논리식을 구하고 간소화하여라.

$a\ b\ c$	f	$\overline{f}$
0 0 0	0	1
0 0 1	1	0
0 1 0	1	0
0 1 1	1	0
1 0 0	1	0
1 0 1	1	0
1 1 0	0	1
1 1 1	0	1

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= \sum m(1,2,3,4,5) \\ &= \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c \\ &= \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c \\ &= (\bar{a}+a)\bar{b}c + \bar{a}b(\bar{c}+c) + a\bar{b}(\bar{c}+c) \\ &= \bar{b}c + \bar{a}b + a\bar{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{f}(a,b,c) &= \sum m(0,6,7) \\ &= \bar{a}\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + abc \\ &= \bar{a}\bar{b}\bar{c} + ab(\bar{c}+c) \\ &= \bar{a}\bar{b}\bar{c} + ab \end{aligned}$$

❑ 2변수로 나타낼 수 있는 모든 경우

a	b	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

❑ 2변수로 나타낼 수 있는 모든 경우의 논리식

$f_0 = 0$	$f_1 = ab$	$f_2 = a\overline{b}$	$f_3 = a$
$f_4 = \overline{a}b$	$f_5 = b$	$f_6 = \overline{a}b + a\overline{b}$	$f_7 = a + b$
$f_8 = \overline{a}\,\overline{b}$	$f_9 = \overline{a}\,\overline{b} + ab$	$f_{10} = \overline{b}$	$f_{11} = a + \overline{b}$
$f_{12} = \overline{a}$	$f_{13} = \overline{a} + b$	$f_{14} = \overline{a} + \overline{b}$	$f_{15} = 1$

n개의 입력 변수가 있을 때 진리표의 행의 개수는 2^n개이며, 2^{2^n}개의 서로 다른 함수가 존재.

n=2 $2^{2^2} = 16$ n=3 $2^{2^3} = 2^8 = 256$ n=4 $2^{2^4} = 2^{16} = 65536$

a	b	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$$f_3 = a\bar{b} + ab = a(\bar{b} + b) = a$$

$$f_5 = \bar{a}b + ab = (\bar{a} + a)b = b$$

$$f_7 = \bar{a}b + a\bar{b} + ab = \bar{a}b + a\bar{b} + ab + ab = \bar{a}b + ab + a\bar{b} + ab = (\bar{a} + a)b + a(\bar{b} + b) = a + b$$

$$f_{10} = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} = (\bar{a} + a)\bar{b} = \bar{b}$$

$$f_{11} = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} + ab = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} + ab + a\bar{b} = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} + a\bar{b} + a\bar{b} = a + \bar{b}$$

$$f_{12} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b = \bar{a}(\bar{b} + b) = \bar{a}$$

$$f_{13} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + ab = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + ab + \bar{a}b = \bar{a} + b$$

$$f_{14} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{b} = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Thank You